PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

NOV

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 161

Heft 1

Ausgegeben den 25. Oktober 1929

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Jährlich 3 Hefte. Vier Hefte bilden einen Band.

Band 161. Heft 1.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Brauer, Alfred, Über diophantische Gleichungen der Form	1
Schlesinger, Ludwig, Über Parallelverschiebung in der Weltgeometrie	14
Geppert, Harald, Zur Theorie des *Borchardt*schen Mittels. I.	21
Perron, Oskar, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen	41

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse
An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik
Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 161

In vier Heften

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1929

Inhaltsverzeichnis des Bandes 161.

Seite

Brauer, Alfred, Über diophantische Gleichungen der Form $g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$ 1

Dubislav, Walter, Elementarer Nachweis der Widerspruchslosigkeit des Logik-Kalküls 107

Fock, V., Über die konforme Abbildung eines Kreisvierecks mit verschwindenden Winkeln auf eine Halbebene 137

Geppert, Harald, Zur Theorie des *Borchardt*schen Mittels. I. 21

Gruder, O., Über symmetrische Grundfunktionen natürlicher Zahlen 152

Hanke, Gerhard, Die Bewegung eines schweren Punktes auf den ungleichachsigen Paraboloiden 73

Kamke, E., Zur Theorie der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen 194

Kommerell, K., Über die Zentralachsen eines Büschels von Dynamen und ihre Beziehung zur Flächentheorie 113

Landau, Edmund, Bestimmung der genauen Konstanten in einem *Koebe*schen Hilfssatz 135

Levi, Friedrich, Über repartitive Mengeneigenschaften 101

Lorey, Wilhelm, Niels Henrik Abel 65

Mathewson, L. C., A simple proof of a Theorem of Kronecker 255

v. Neumann, J., Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. 208

Perron, Oskar, Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen 41

Rau, Heinz, Über die Lebesgueschen Konstanten der Reihenentwicklungen nach Jacobischen Polynomen 237

Schlesinger, Ludwig, Über Parallelverschiebung in der Weltgeometrie 14

Schlesinger, Ludwig, Über den Logarithmus einer Matrix 199

Scholz, Arnold, Zwei Bemerkungen zum Klassenkörperturm 201

Späth †, Hans, Der *Weierstraß*sche Vorbereitungssatz 95

Tschebotaröw, N., Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers 179

Wernick, Georg, Die Unabhängigkeit des zweiten distributiven Gesetzes von den übrigen Axiomen der Logistik 123

Ausgabedaten der Hefte von Band 161.

Heft 1 ausgegeben am 25. Oktober 1929
Heft 2 ausgegeben am 26. November 1929
Heft 3 ausgegeben am 9. Dezember 1929
Heft 4 ausgegeben am 30. Dezember 1929

Über diophantische Gleichungen der Form $g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$.

Von *Alfred Brauer* in Berlin.

Einleitung.

Im Anschluß an den *Thue*schen Satz über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen wurde die folgende Frage in einer Reihe von Arbeiten behandelt: Wann kann eine binäre diophantische Gleichung von der Form

$$cy^n = f(x), \tag{1}$$

wo c eine ganze rationale Zahl und $f(x)$ ein Polynom mit ganzen rationalen Koeffizienten ist, höchstens endlich viele ganze rationale Lösungen haben? Zunächst zeigte *A. Thue* [1]) und unabhängig davon die Herren *E. Landau* und *A. Ostrowski* [2]), daß für $n > 2$ und quadratische Polynome $f(x)$ die Gleichung (1) höchstens endlich viele ganze rationale Lösungen haben kann. Dasselbe zeigte Herr *L. J. Mordell* [3]) für $n = 2$ und kubische und spezielle biquadratische Polynome mit nur einfachen Nullstellen in mehreren Arbeiten. Ich stellte mir die Aufgabe, auch andere Fälle der Gleichung (1) zu erledigen; es gelang mir zu zeigen, daß für hinreichend großes n diese Gleichung jedenfalls nur endlich viele ganze rationale Lösungen besitzt, wenn $f(x)$ in einem algebraischen Zahlkörper irreduzibel ist, aber nach Adjunktion einer quadratischen Irrationalität zu diesem Körper reduzibel wird, insbesondere also, wenn $f(x) = 0$ eine irreduzible Gleichung 4. Grades oder eine Gleichung geraden Grades ohne Affekt ist. Während diese Untersuchungen schon abgeschlossen waren, wurde von Herrn *Mordell* [4]) eine anonyme Arbeit veröffentlicht, in der die Gleichung (1) allgemein erledigt wurde. Meine Methode ergibt dieses allgemeine Resultat nicht, dafür aber erscheinen meine Ergebnisse als Spezialfälle des folgenden Satzes, der bisher auf anderen Wege nicht bewiesen wurde:

Es seien $g(x, y)$ und $h(x, y)$ Polynome mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper K; *die Koeffizienten a_0 und b_0 der höchsten Potenzen von x in diesen Polynomen, sowie der Koeffizient der höchsten Potenz von x in dem Polynom $b_0 g(x, y) - a_0 h(x, y)$ seien von y freie Konstanten. Ferner seien $g(x, 0)$ und $h(x, 0)$ als Polynome in x teilerfremd. γ und μ seien Zahlen aus* K; *es sei* $\mathsf{K} \neq \mathsf{K}(\sqrt{\mu})$. *Dann hat für hinreichend großes ganzes rationales n die diophantische Gleichung*

$$g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt im § 2, nachdem vorher im § 1 einige Hilfssätze bewiesen worden sind.

---

[1]) Über die Unlösbarkeit der Gleichung $ax^2 + bx + c = dy^n$ in großen ganzen Zahlen x und y, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 34 (1917), Nr. 16, S. 1—6.

[2]) *E. Landau* und *A. Ostrowski*, On the diophantine equation $ay^2 + by + c = dx^n$, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 19 (1921), S. 276—280 und ebenda (2) 20 (1922), S. XXXIV.

[3]) A Statement by Fermat, Proceedings of the London Mathematical Society (2) 18 (1920), S. V/VI. — On the integer solutions of the equation $ey^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ebenda (2) 21 (1923), S. 415—419. — Note on the integer solutions of the equation $Ey^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, The Messenger of Mathematics 51 (1922), S. 169—171.

[4]) The integer solution of the equation $y^2 = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + k$, The Journal of the London Mathematical Society I 2 (1926), S. 66—68.

§ 1.

Hilfssatz 1: *Es seien α, β, μ ganze Zahlen des algebraischen Zahlkörpers* K *und α, β nicht beide gleich Null; es sei $\sqrt{\mu}$ nicht im Körper* K *enthalten. Man setze für jedes positive ganze rationale n*

$$(x+\sqrt{\mu})^n = u_n(x) + \sqrt{\mu}\, v_n(x). \tag{2}$$

Dann hat die Gleichung

$$p(x) = \alpha u_n(x) + \beta v_n(x) = 0 \tag{3}$$

keine Doppelwurzel.

Beweis: Man kann $n > 1$ annehmen; durch Differentiation von (2) folgt

$$\frac{d}{dx}(x+\sqrt{\mu})^n = n(x+\sqrt{\mu})^{n-1} = u_n'(x) + \sqrt{\mu}\, v_n'(x).$$

Also ist

$$n u_{n-1}(x) + n\sqrt{\mu} v_{n-1}(x) = u_n'(x) + \sqrt{\mu} v_n'(x),$$

$$\begin{cases} u_n'(x) = n u_{n-1}(x), \\ v_n'(x) = n v_{n-1}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Andererseits ist

$$(x+\sqrt{\mu})^n = (x+\sqrt{\mu})(x+\sqrt{\mu})^{n-1},$$

folglich

$$u_n(x) + \sqrt{\mu} v_n(x) = x u_{n-1}(x) + x\sqrt{\mu} v_{n-1}(x) + \sqrt{\mu} u_{n-1}(x) + \mu v_{n-1}(x).$$

Hieraus folgt

$$\begin{cases} u_n(x) = x u_{n-1}(x) + \mu v_{n-1}(x), \\ v_n(x) = x v_{n-1}(x) + u_{n-1}(x). \end{cases} \tag{5}$$

Falls α und β nicht beide 0 sind, verschwindet $p(x)$ nicht identisch, da $u_n(x)$ vom Grade n, $v_n(x)$ vom Grade $n-1$ ist. Hätte nun $p(x) = 0$ eine Doppelwurzel, so hätte $p(x)$ mit $p'(x)$ einen nicht konstanten größten gemeinsamen Teiler $t(x)$, dessen Koeffizienten Zahlen aus K sind. Nun folgt aus (3) und (4)

$$p'(x) = \alpha u_n'(x) + \beta v_n'(x) = n\{\alpha u_{n-1}(x) + \beta v_{n-1}(x)\}.$$

Daher ist

$$t(x) \mid \{\alpha u_{n-1}(x) + \beta v_{n-1}(x)\}. \tag{6}$$

Andererseits folgt aus (3) und (5)

$$\begin{aligned} p(x) &= \alpha x u_{n-1}(x) + \alpha\mu v_{n-1}(x) + \beta x v_{n-1}(x) + \beta u_{n-1}(x) \\ &= x\{\alpha u_{n-1}(x) + \beta v_{n-1}(x)\} + \{\beta u_{n-1}(x) + \alpha\mu v_{n-1}(x)\}. \end{aligned}$$

Da $t(x) \mid p(x)$ war, folgt nun wegen (6)

$$t(x) \mid \{\beta u_{n-1}(x) + \alpha\mu v_{n-1}(x)\}.$$

Folglich ist $t(x)$ auch ein Teiler von

$$\begin{aligned} &\{\beta u_{n-1}(x) + \alpha\mu v_{n-1}(x)\} + \sqrt{\mu}\{\alpha u_{n-1}(x) + \beta v_{n-1}(x)\} \\ &= (\beta + \alpha\sqrt{\mu})(u_{n-1}(x) + \sqrt{\mu} v_{n-1}(x)) = (\beta + \alpha\sqrt{\mu})(x+\sqrt{\mu})^{n-1}. \end{aligned}$$

Also wäre

$$t(x) \mid (x+\sqrt{\mu})^{n-1}.$$

Dies ist unmöglich, denn für jedes ganze rationale positive ν und für jede beliebige Konstante $C \neq 0$ hat das Polynom $C(x + \sqrt{\mu})^\nu$ Koeffizienten, die nicht sämtlich im Körper K liegen, da $\sqrt{\mu}$ nach Voraussetzung keine Zahl von K war; sämtliche Teiler von $(x + \sqrt{\mu})^{n-1}$ sind aber von der Form $C(x + \sqrt{\mu})^\nu$; dagegen hatte $t(x)$ Koeffizienten aus K. Also hat die Gleichung $p(x) = 0$ keine Doppelwurzel.

Hilfssatz 2: *Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Hilfssatzes 1 seien α_1 und β_1 ganze Zahlen aus* K. *Es sei die Determinante*

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Man setze

$$p_1(x) = \alpha_1 u_n(x) + \beta_1 v_n(x) .$$

Dann sind die Polynome $p(x)$ und $p_1(x)$ teilerfremd.

Beweis: Ein gemeinsamer Teiler $d(x)$ von $p(x)$ und $p_1(x)$ müßte in

$$\beta_1 p(x) - \beta p_1(x) = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) u_n(x)$$

und in

$$\alpha p_1(x) - \alpha_1 p(x) = (\alpha\beta_1 - \alpha_1\beta) v_n(x)$$

aufgehen, wäre also ein gemeinsamer Teiler von $u_n(x)$ und $v_n(x)$. Da $u_n(x)$ und $v_n(x)$ Koeffizienten aus K hatten, müßte $d(x)$ ebenfalls Koeffizienten aus K haben. Dies ist unmöglich, da wegen (2) $d(x)$ ein Teiler von $(x + \sqrt{\mu})^n$ sein müßte.

Hilfssatz 3: *Es seien $W_1(\varkappa, \lambda)$ und $W_2(\varkappa, \lambda)$ Formen in $\varkappa$ und λ von der Dimension n mit konstanten Koeffizienten, $y = y(\varkappa, \lambda)$ eine quadratische Form in $\varkappa$ und λ, $a_1(y), a_2(y), \ldots, a_k(y)$ und $b_1(y), b_2(y), \ldots, b_l(y)$ Polynome in y mit konstanten Koeffizienten von den Graden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$; $a_0 \neq 0$ und $b_0 \neq 0$ seien Konstanten, $k > l$ positive ganze rationale Zahlen. Ferner seien*

$$(7) \quad \begin{cases} g(x) = a_0 x^k + a_1(y) x^{k-1} + a_2(y) x^{k-2} + \cdots + a_{k-1}(y) x + a_k(y) - W_1(\varkappa, \lambda) = 0 , \\ h(x) = b_0 x^l + b_1(y) x^{l-1} + b_2(y) x^{l-2} + \cdots + b_{l-1}(y) x + b_l(y) - W_2(\varkappa, \lambda) = 0 \end{cases}$$

zwei Gleichungen in x. Ist dann

$$(8) \quad \begin{cases} \alpha_\tau < \dfrac{n}{2k} \tau & (\tau = 1, 2, \ldots, k), \\ \beta_\tau < \dfrac{n}{2k} \tau & (\tau = 1, 2, \ldots, l), \end{cases}$$

so läßt sich die Resultante R des Gleichungssystems (7) in der folgenden Form darstellen:

$$(9) \quad R = (-1)^k a_0^l W_2(\varkappa, \lambda)^k + V_1(\varkappa, \lambda) W_2(\varkappa, \lambda)^{k-1} + V_2(\varkappa, \lambda) W_2(\varkappa, \lambda)^{k-2} + \cdots + V_{k-1}(\varkappa, \lambda) W_2(\varkappa, \lambda) + (-1)^{kl+l} b_0^k W_1(\varkappa, \lambda)^l + V^*(\varkappa, \lambda).$$

Hierbei gelten für die Gesamtgrade $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ und v^* der Polynome $V_1(\varkappa, \lambda)$, $V_2(\varkappa, \lambda), \ldots, V_{k-1}(\varkappa, \lambda)$ und $V^*(\varkappa, \lambda)$ in bezug auf $\varkappa$ und λ die Ungleichungen

$$(10) \quad v_\tau \leqq \frac{l n \tau}{k} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, k-1)$$

und

$$(11) \quad v^* < l n .$$

Beweis: Es ist

$$R = \begin{vmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} & a_k - W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{k-2} & a_{k-1} & a_k - W_1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & a_0 & a_1 & \dots & & & a_k - W_1 \\
b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{l-1} & b_l - W_2 & 0 & \dots & & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \dots & & b_{l-1} & b_l - W_2 & 0 \dots & & 0 \\
\dots & & & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & & & \\
\dots & & & & & & & & & \\
0 & \dots & & & 0 & b_0 & b_1 & \dots & & b_l - W_2
\end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt sofort, daß $(-1)^k a_0^l$ der Koeffizient von $W_2(\varkappa, \lambda)^k$ und $(-1)^{kl+l} b_0^k$ derjenige von $W_1(\varkappa, \lambda)^l$ ist. Daher läßt sich R in der Form (9) darstellen. Es muß noch gezeigt werden, daß bei dieser Darstellung die Bedingungen (10) und (11) erfüllt sind.

Schreibt man nun $W_1(\varkappa, \lambda)$ das Gewicht k und $W_2(\varkappa, \lambda)$ das Gewicht l zu, so ist R als Funktion von $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, a_k, W_1, b_0, b_1, \dots, b_{l-1}, b_l, W_2$ isobar vom Gewicht kl. Es sei

$$Z = C W_1(\varkappa, \lambda)^{r_1} W_2(\varkappa, \lambda)^{r_2} P(\varkappa, \lambda) \tag{12}$$

ein beliebiges Glied von R, wo $r_1 \geqq 0, r_2 \geqq 0, C$ eine Konstante und $P(\varkappa, \lambda)$ ein Produkt von gewissen der a_τ und b_τ ist. Es seien etwa $a_{\varrho_1}, a_{\varrho_2}, \dots, a_{\varrho_\mu}, b_{\sigma_1}, b_{\sigma_2}, \dots, b_{\sigma_\nu}$ die Faktoren von $P(\varkappa, \lambda)$, mehrfache mehrfach geschrieben. $P(\varkappa, \lambda)$ sei in bezug auf die a_τ und b_τ vom Gewicht s und enthalte y in der Potenz t; dann ist also, da a_0 und b_0 von y freie Konstanten waren,

$$\begin{cases} \sum_{\gamma=1}^{\mu} \alpha_{\varrho_\gamma} + \sum_{\gamma=1}^{\nu} \beta_{\sigma_\gamma} = t, \\ \sum_{\gamma=1}^{\mu} \varrho_\gamma + \sum_{\gamma=1}^{\nu} \sigma_\gamma = s. \end{cases} \tag{13}$$

Aus $s = 0$ folgt $t = 0$.

Ist $s > 0$, so folgt aus (8) und (13)

$$t < \frac{n}{2k} s. \tag{14}$$

Da andererseits Z das Gewicht kl hat, ist wegen (12)

$$k r_1 + l r_2 + s = kl. \tag{15}$$

Ist nun $k > r_2 > 0$, so ist wegen (12) und (9) Z ein Element von $V_{k-r_2}(\varkappa, \lambda) W_2(\varkappa, \lambda)^{r_2}$, also $C W_1(\varkappa, \lambda)^{r_1} P(\varkappa, \lambda)$ ein Glied von $V_{k-r_2}(\varkappa, \lambda)$. Dieses Glied sei in bezug auf $\varkappa$ und λ von der Dimension u; dann ist wegen (14) und (15)

$$u = n r_1 + 2t \leqq n r_1 + \frac{n s}{k} = \frac{n(kl - l r_2 - s)}{k} + \frac{n s}{k} = \frac{l n}{k}(k - r_2). \tag{16}$$

Das Gleichheitszeichen tritt für $s = 0$ ein. Da (16) für jedes Z, für das $k > r_2 > 0$ ist, gilt, ist hiermit (10) bewiesen.

Ist ferner $r_2 = 0$ und $r_1 < l$, so ist Z ein Element von $V^*(\varkappa, \lambda)$. Die Dimension von Z in bezug auf $\varkappa$ und λ ist dann

(17) $$u = nr_1 + 2t.$$

Andererseits folgt aus (15)

(18) $$s = kl - kr_1 > 0.$$

Also ist $s > 0$; daher folgt aus (17) wegen (14) und (18)

$$u < nr_1 + \frac{ns}{k} = ln.$$

Damit ist auch (11) bewiesen.

Außer diesen Hilfssätzen wird im nächsten Paragraphen noch der folgende Satz gebraucht, den ich in meiner Arbeit „Über diophantische Gleichungen mit endlich vielen Lösungen" bewiesen habe [5]):

Es sei $U(x, y)$ eine binäre Form der Dimension n ohne mehrfache Linearfaktoren mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper K, *der in bezug auf den Körper* P *der rationalen Zahlen vom Grade h sei; $V_1(x, y), V_2(x, y), \ldots, V_k(x, y)$ seien ganze rationale Funktionen in x und y mit Koeffizienten aus* K, *ihre Gesamtgrade seien $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Es sei*

$$v_\varrho \leqq \frac{v_k \varrho}{k} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Ferner sei die Summe der Glieder der Dimension v_k von $V_k(x, y)$ zu $U(x, y)$ teilerfremd. Man setze

$$s = \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{4n+1} - 1\right)\right].$$

Ist dann

$$v_k < k\left\{n - h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\},$$

so hat die diophantische Gleichung

$$U(x, y)^k + U(x, y)^{k-1} V_1(x, y) + \cdots + U(x, y) V_{k-1}(x, y) + V_k(x, y) = 0$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K.

§ 2.

Satz 1: *Es sei* K *ein algebraischer Körper vom Grade h; γ und μ seien ganze Zahlen aus* K; *es sei* $\mathsf{K} \neq \mathsf{K}(\sqrt{\mu})$. *Das Polynom $f(x, y)$ mit ganzen Koeffizienten aus* K *zerfalle in dem relativquadratischen Körper* $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ *in der Form*

$$f(x, y) = \{g(x, y) + \sqrt{\mu}\, h(x, y)\}\{g(x, y) - \sqrt{\mu}\, h(x, y)\},$$

wo $g(x, y)$ und *$h(x, y)$ Koeffizienten aus* K *haben. Die diophantische Gleichung*

(19) $$\begin{aligned} \gamma y^n = f(x, y) &= g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) \\ &= \{g(x, y) + \sqrt{\mu}\, h(x, y)\}\{g(x, y) - \sqrt{\mu} h(x, y)\} \end{aligned}$$

hat dann unter den folgenden Voraussetzungen nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K:

Es sei

(20) $$\begin{cases} g(x, y) = a_0 x^k + a_1(y) x^{k-1} + a_2(y) x^{k-2} + \cdots + a_k(y), \\ h(x, y) = b_0 x^l + b_1(y) x^{l-1} + b_2(y) x^{l-2} + \cdots + b_l(y). \end{cases}$$

Hierbei sei $k \geqq l$ [6]); *a_0 und b_0 seien von 0 verschiedene Konstanten; $g(x, 0)$ und $h(x, 0)$ seien als Polynome in x teilerfremd. Man setze, falls $k = l$ ist,*

---

[5]) Dieses Journal 160 (1929), S. 97.

[6]) Sonst multipliziere man (19) mit μ.

(21) $h^*(x, y) = b_0 g(x,y) - a_0 h(x,y) = b_0^* x^{l^*} + b_1^*(y) x^{l^*-1} + b_2^*(y) x^{l^*-2} + \cdots + b_{l^*}^*(y).$

Hier sei b_0^* *eine von* 0 *verschiedene Konstante. Die Grade von* $a_\tau(y)$, $b_\tau(y)$ *und* $b_\tau^*(y)$ *seien* α_τ *bzw.* β_τ *bzw.* β_τ^*. *Ferner sei*

$$(22)\qquad \begin{cases} \alpha_\tau < \dfrac{n}{2k}\,\tau & (\tau = 1, 2, \ldots, k), \\ \beta_\tau < \dfrac{n}{2k}\,\tau & \text{für } k > l \ (\tau = 1, 2, \ldots, l), \\ \beta_\tau^* < \dfrac{n}{2k}\,\tau & \text{für } k = l \ (\tau = 1, 2, \ldots, l^*). \end{cases}$$

Endlich sei

$$(23)\qquad \begin{cases} n > \dfrac{2kh\{2kh - (k-l)\}}{(k-l)^2} & \text{für } k > l, \\ n > \dfrac{2kh\{2kh - (k-l^*)\}}{(k-l^*)^2} & \text{für } k = l. \end{cases}$$

Beweis [7]: Die Koeffizienten von $g(x, y)$ und $h(x, y)$ kann man als ganzzahlig annehmen, sonst multipliziere man (19) mit einer geeigneten ganzen rationalen Zahl. Es sei $\Phi(x, y)$ der größte gemeinsame Teiler von $g(x, y)$ und $h(x, y)$; dann lassen sich bekanntlich Polynome $\mathsf{A}(x, y)$, $\mathsf{B}(x, y)$ in x und y und ein Polynom $\Psi(y)$ in y allein bestimmen, derart daß

$$(24)\qquad g(x, y)\,\mathsf{A}(x, y) + h(x, y)\,\mathsf{B}(x, y) = \Phi(x, y)\Psi(y)$$

ist. Hierbei kann man annehmen, daß die Koeffizienten aller Polynome ganze Zahlen aus K sind, daß $\mathsf{A}(x, y)$ und $\mathsf{B}(x, y)$ teilerfremd sind, und daß ferner der Grad in bezug auf x von $\mathsf{A}(x, y)$ kleiner als der Grad von $h(x, y)$ und der von $\mathsf{B}(x, y)$ kleiner als der von $g(x, y)$ ist. Nun waren a_0 und b_0 Konstanten, also ist $g(x, y)$ und $h(x, y)$ und daher auch $\Phi(x, y)$ nicht durch y teilbar. Folglich verschwindet $\Phi(x, 0)$ nicht identisch. Andererseits ist $\Phi(x, 0)$ ein gemeinsamer Teiler von $g(x, 0)$ und $h(x, 0)$; diese Polynome sind aber nach Voraussetzung teilerfremd. Also ist $\Phi(x, 0)$ eine von 0 verschiedene Konstante und zwar eine ganze Zahl aus K. Man setze

$$\Phi(x, 0) = c \neq 0.$$

Dann ist $\Phi(x, y)$ von der Form

$$(25)\qquad \Phi(x, y) = c + y\,\Phi_1(x, y),$$

wo $\Phi_1(x, y)$ ein ganzzahliges Polynom aus K ist. Wäre

$$\Psi(0) = 0,$$

so würde aus (24) folgen

$$(26)\qquad g(x, 0)\,\mathsf{A}(x, 0) + h(x, 0)\,\mathsf{B}(x, 0) \equiv 0.$$

Nun verschwanden $g(x, 0)$ und $h(x, 0)$ nicht identisch. $\mathsf{A}(x, y)$ und $\mathsf{B}(x, y)$ waren teilerfremd, können also nicht gleichzeitig den Teiler y besitzen; also verschwinden $\mathsf{A}(x, 0)$ und $\mathsf{B}(x, 0)$ nicht gleichzeitig identisch, folglich verschwinden wegen (26) beide nicht identisch. Da $g(x, 0)$ und $h(x, 0)$ teilerfremd waren, müßte $g(x, 0)$ ein Teiler von $\mathsf{B}(x, 0)$ sein, dies ist wegen der Grade nicht möglich. Daher kann die Identität (26) nicht bestehen, also ist

$$\Psi(0) = c' \neq 0.$$

---

[7]) Vgl. zu diesem Beweise *E. Landau* und *A. Ostrowski* a. a. O. 2.

Man setze

$$\Psi(y) = c' + y\Psi_1(y), \tag{27}$$

wo c' und die Koeffizienten von $\Psi_1(y)$ ganze Zahlen aus K sind. Daher folgt aus (24), (25) und (27)

$$g(x,y)\,\mathsf{A}(x,y) + h(x,y)\,\mathsf{B}(x,y) = \{c + y\Phi_1(x,y)\}\,\{c' + y\Psi_1(y)\}. \tag{28}$$

Nun sei x, y ein ganzzahliges Lösungspaar aus K von (19). Dann ist

$$\{g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}\}\,\{g(x,y) - h(x,y)\sqrt{\mu}\} = \gamma y^n.$$

Es seien $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die voneinander verschiedenen Primideale des Körpers $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$, die in $2cc'\gamma\mu$ aufgehen. Ferner sei $\mathfrak{q}$ ein Primidealteiler von y in $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$, der von $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ verschieden ist. Soll nun $\mathfrak{q}$ gleichzeitig in $\{g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}\}\mathfrak{o}$ und $\{g(x,y) - h(x,y)\sqrt{\mu}\}\mathfrak{o}$ aufgehen, so muß es in $2g(x,y)$ und $2h(x,y)\sqrt{\mu}$ aufgehen. In 2 und $\sqrt{\mu}$ geht $\mathfrak{q}$ nicht auf, daher müßte $\mathfrak{q}$ gleichzeitig in $g(x,y)$ und $h(x,y)$ aufgehen. Dann wäre aber, da $\mathfrak{q}$ ein Teiler von y ist, nach (28) $\mathfrak{q}$ ein Teiler von cc' gegen die Annahme. Daher ist

$$\begin{cases} \{g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}\}\mathfrak{o} = \mathfrak{p}_1^{\gamma_1}\mathfrak{p}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{\gamma_r}\mathfrak{u}^n & (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r \geqq 0), \\ \{g(x,y) - h(x,y)\sqrt{\mu}\}\mathfrak{o} = \mathfrak{p}_1^{\delta_1}\mathfrak{p}_2^{\delta_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{\delta_r}\mathfrak{u}_1^n & (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r \geqq 0). \end{cases} \tag{29}$$

Hierbei kann man sich die Zahlen γ_ν und δ_ν (mod n) reduziert denken, indem man die übrigen Potenzen der $\mathfrak{p}_\nu$ in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}_1$ hineinzieht. Setzt man also

$$\mathfrak{p}_1^{\gamma_1}\mathfrak{p}_2^{\gamma_2}\cdots\mathfrak{p}_r^{\gamma_r} = \mathfrak{f},$$

so kommen für $\mathfrak{f}$ nur endlich viele Ideale in Betracht. Aus (29) folgt

$$\{g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}\}\mathfrak{o} = \mathfrak{f}\mathfrak{u}^n. \tag{30}$$

Aus jeder der endlich vielen Idealklassen von $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ wähle man ein festes Ideal aus. Gehört nun $\mathfrak{u}$ zur Klasse $\mathfrak{R}$, so sei $\mathfrak{v}$ das aus der Klasse $\mathfrak{R}^{-1}$ gewählte Ideal. Dann ist

$$\mathfrak{u}\mathfrak{v} \sim \mathfrak{o}. \tag{31}$$

Andererseits ist nach (30)

$$\mathfrak{f}\mathfrak{u}^n \sim \mathfrak{o}, \tag{32}$$

folglich nach (31) und (32)

$$\mathfrak{f} \sim \mathfrak{f}(\mathfrak{u}\mathfrak{v})^n \sim \mathfrak{v}^n. \tag{33}$$

Da für $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{v}$ nur endlich viele Ideale in Betracht kommen, gibt es nur endlich viele Kombinationen von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{v}$. Für jede dieser Kombinationen läßt sich eine ganze rationale Zahl d und eine ganze Zahl $\omega \neq 0$ aus $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ angeben, derart, daß aus (33)

$$d\mathfrak{f} = \omega\mathfrak{v}^n$$

folgt. Hierbei sind d und ω unabhängig von $\mathfrak{u}$; sie hängen nur von der Idealklasse $\mathfrak{R}$ und von $\mathfrak{f}$ ab. Daher kommen für d und ω nur endlich viele Zahlen in Betracht. Ist d^* das kleinste gemeinsame Vielfache dieser endlich vielen für d in Betracht kommenden Zahlen, so kann man erreichen, daß

$$d^*\mathfrak{f} = \omega^*\mathfrak{v}^n \tag{34}$$

ist, wo also d^* eine feste ganze rationale Zahl ist und für $\omega^* \neq 0$ nur endlich viele ganze Zahlen aus $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ in Betracht kommen. Nun folgt aus (30) und (34)

$$\{d^*(g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu})\}\mathfrak{o} = d^*\mathfrak{f}\mathfrak{u}^n = \omega^*\mathfrak{v}^n\mathfrak{u}^n = \omega^*(\mathfrak{u}\mathfrak{v})^n.$$

Nach (31) war $\mathfrak{u}\mathfrak{v}$ ein Hauptideal, es werde erzeugt durch die Zahl σ; dann ist

$$\{d^*(g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu})\}\mathfrak{o} = \omega^*(\sigma\mathfrak{o})^n.$$

Folglich ist

$$d^*(g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}) = \varepsilon\omega^*\sigma^n, \tag{35}$$

wo ε eine Einheit von $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ ist. Bilden nun $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_z$ ein System von Grundeinheiten des Körpers $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$, so läßt sich ε darstellen in der Form

$$\varepsilon = \varrho\,\eta_1^{\nu_1}\eta_2^{\nu_2}\cdots\eta_z^{\nu_z},$$

wo ϱ eine Einheitswurzel von $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ ist. Es genügt hier, für ε nur solche Werte zu nehmen, für die die Exponenten $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_z \pmod n$ reduziert sind, weil man die übrigen Potenzen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_z$ in σ hineinziehen kann. Da ferner $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ nur endlich viele Einheitswurzeln enthält, braucht man für ε nur endlich viele Werte zu berücksichtigen. Daher kommen für $\varepsilon\omega^*$ ebenfalls nur endlich viele Zahlen in Betracht.

Nun läßt sich jede Zahl φ aus $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ darstellen in der Form

$$\varphi = \pi + \pi'\sqrt{\mu}, \tag{36}$$

wo π und π' Zahlen aus K sind. Ist φ ganz, so ist auch $\pi - \pi'\sqrt{\mu}$ ganz, folglich auch 2π und $2\pi'\sqrt{\mu}$ und daher $2\mu\pi$ und $2\mu\pi'$ ganz. Setzt man

$$2\mu\pi = \psi,$$
$$2\mu\pi' = \psi',$$

so läßt sich wegen (36) φ darstellen in der Form

$$\varphi = \frac{\psi + \psi'\sqrt{\mu}}{2\mu},$$

wo ψ und ψ' ganze Zahlen aus K sind.

Da $\varepsilon\omega^*$ und σ ganze Zahlen aus $\mathsf{K}(\sqrt{\mu})$ waren, kann man daher setzen

$$\begin{cases} \varepsilon\omega^* = \dfrac{\zeta + \vartheta\sqrt{\mu}}{2\mu}, \\ \sigma = \dfrac{\varkappa + \lambda\sqrt{\mu}}{2\mu}, \end{cases} \tag{37}$$

wo $\zeta, \vartheta, \varkappa, \lambda$ ganze Zahlen aus K sind. Hierbei kommen für ζ und ϑ nur endlich viele feste Werte in Betracht.

Es soll nun gezeigt werden, daß für jedes feste Wertepaar ζ und ϑ höchstens endlich viele Wertepaare $\varkappa$ und λ in Betracht kommen.

Man setze

$$(x + \sqrt{\mu})^n = u(x) + \sqrt{\mu}v(x).$$

Dann folgt aus (35) und (37)

$$\begin{aligned} (2\mu)^{n+1}d^*(g(x,y) + h(x,y)\sqrt{\mu}) &= (\zeta + \vartheta\sqrt{\mu})(\varkappa + \lambda\sqrt{\mu})^n \\ &= (\zeta + \vartheta\sqrt{\mu})\,\lambda^n\left\{u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\sqrt{\mu}\right\} \\ &= \lambda^n\left\{\left[\zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right] + \sqrt{\mu}\left[\vartheta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \zeta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right]\right\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Folglich ist

$$\begin{cases} (2\mu)^{n+1}d^*g(x,y) = \lambda^n\left\{\zeta u\left(\dfrac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\dfrac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\}, \\ (2\mu)^{n+1}d^*h(x,y) = \lambda^n\left\{\vartheta u\left(\dfrac{\varkappa}{\lambda}\right) + \zeta v\left(\dfrac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\}. \end{cases} \tag{39}$$

Aus (21) folgt dann

$$(40)\quad (2\mu)^{n+1} d^* h^*(x,y) = \lambda^n \left\{ b_0 \zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + b_0 \mu \vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) - a_0 \vartheta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) - a_0 \zeta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \right\}$$
$$= \lambda^n \left\{ (b_0\zeta - a_0\vartheta)\, u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + (b_0\mu\vartheta - a_0\zeta)\, v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \right\}.$$

Nun sind

$$\left\{\zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\},\ \left\{\vartheta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \zeta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\}$$

und

$$\left\{ (b_0\zeta - a_0\vartheta)\, u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + (b_0\mu\vartheta - a_0\zeta)\, v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right\}$$

ganze rationale Funktionen der einen Veränderlichen $\frac{\varkappa}{\lambda}$. Nach Hilfssatz 1 haben diese Polynome keine mehrfachen Nullstellen, da $a_0, b_0, \zeta, \vartheta, \mu$ ganze Zahlen aus K waren und die Größen $b_0\zeta - a_0\vartheta$ und $b_0\mu\vartheta - a_0\zeta$ nicht gleichzeitig verschwinden können. Wäre nämlich gleichzeitig

$$b_0\zeta - a_0\vartheta = 0,$$
$$b_0\mu\vartheta - a_0\zeta = 0,$$

so müßte die Determinante dieses Gleichungssystems für b_0 und a_0

$$\begin{vmatrix} \zeta & -\vartheta \\ \mu\vartheta & -\zeta \end{vmatrix} = -(\zeta^2 - \mu\vartheta^2) = -(\zeta + \vartheta\sqrt{\mu})(\zeta - \vartheta\sqrt{\mu}) = 0$$

sein. Nun kann aber $\zeta \pm \vartheta\sqrt{\mu}$ nur verschwinden, wenn $\zeta = \vartheta = 0$ ist. Dann wäre wegen (37) $\varepsilon\omega^* = 0$; dies ist unmöglich, da $\varepsilon \neq 0$ und $\omega^* \neq 0$ ist.

Ferner sind nach Hilfssatz 2 die Polynome

$$\zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad \vartheta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \zeta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)$$

bzw.

$$\zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \quad \text{und} \quad (b_0\zeta - a_0\vartheta)\, u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + (b_0\mu\vartheta - a_0\zeta) v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)$$

teilerfremd, da die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \zeta & \mu\vartheta \\ \vartheta & \zeta \end{vmatrix} = \zeta^2 - \mu\vartheta^2 \neq 0$$

bzw.

$$\begin{vmatrix} \zeta & \mu\vartheta \\ b_0\zeta - a_0\vartheta & b_0\mu\vartheta - a_0\zeta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \zeta & \mu\vartheta \\ -a_0\vartheta & -a_0\zeta \end{vmatrix} = -a_0(\zeta^2 - \mu\vartheta^2) \neq 0$$

sind. Setzt man daher

$$(41)\quad \begin{cases} W_1(\varkappa,\lambda) = \lambda^n \left[\zeta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \mu\vartheta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right], \\ W_2(\varkappa,\lambda) = \begin{cases} \lambda^n \left[\vartheta u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + \zeta v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right] & \text{für } k > l, \\ \lambda^n \left[(b_0\zeta - a_0\vartheta)\, u\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right) + (b_0\mu\vartheta - a_0\zeta) v\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right] & \text{für } k = l, \end{cases} \end{cases}$$

so haben die Formen $W_1(\varkappa,\lambda)$ und $W_2(\varkappa,\lambda)$ keine mehrfachen Linearfaktoren und sind zueinander teilerfremd, da ein gemeinsamer Teiler λ nur für $\zeta = \vartheta = 0$ auftreten könnte.

Nun folgt aus (39) und (40)

$$(42)\qquad \left.\begin{array}{l}(2\mu)^{n+1}d^{*}g(x,y)-W_1(\varkappa,\lambda)=0\\ (2\mu)^{n+1}d^{*}h(x,y)-W_2(\varkappa,\lambda)=0\end{array}\right\}\quad \text{für } k>l,$$

bzw.

$$(43)\qquad \left.\begin{array}{l}(2\mu)^{n+1}d^{*}g(x,y)-W_1(\varkappa,\lambda)=0\\ (2\mu)^{n+1}d^{*}h^{*}(x,y)-W_2(\varkappa,\lambda)=0\end{array}\right\}\quad \text{für } k=l.$$

Andererseits folgt aus (19) und (38)

$$(44)\qquad y^n=\frac{\zeta^2-\mu\vartheta^2}{(2\mu)^{2(n+1)}d^{*2}\gamma}\,(\varkappa^2-\mu\lambda^2)^n.$$

Hieraus folgt, daß der Quotient $\dfrac{\zeta^2-\mu\vartheta^2}{(2\mu)^{2(n+1)}d^{*2}\gamma}$ die n-te Potenz einer Zahl aus K ist. Man setze

$$(45)\qquad \frac{\zeta^2-\mu\vartheta^2}{(2\mu)^{2(n+1)}d^{*2}\gamma}=\delta^n.$$

Dann kommen bei festem ζ und ϑ für δ höchstens n, also endlich viele Werte in Betracht; es genügt daher zu zeigen, daß bei festem ζ, ϑ und δ für $\varkappa$ und λ höchstens endlich viele Werte möglich sind. Aus (44) und (45) folgt

$$(46)\qquad y=\delta(\varkappa^2-\mu\lambda^2).$$

Also ist y eine quadratische Form in $\varkappa$ und λ mit Koeffizienten aus K.

Man setze zur Abkürzung

$$(47)\qquad \left\{\begin{array}{rll} b_0^{**}=\begin{cases}b_0 & \text{für } k>l\\ b_0^{*} & \text{für } k=l,\end{cases} & & \\ b_\nu^{**}(y)=\begin{cases}b_\nu(y) & \text{für } k>l\\ b_\nu^{*}(y) & \text{für } k=l\end{cases} & (\nu=1,2,\ldots,l) & \\ & (\nu=1,2,\ldots,l^{*}), & \\ l^{**}=\begin{cases}l & \text{für } k>l\\ l^{*} & \text{für } k=l.\end{cases} & & \end{array}\right.$$

Dann ist wegen (21)

$$(48)\qquad k>l^{**}.$$

Ferner gehen die Gleichungssysteme (42) und (43) wegen (20) und (21) über in das Gleichungssystem

$$(49)\qquad \left.\begin{array}{l}(2\mu)^{n+1}d^{*}\{a_0x^k+a_1(y)x^{k-1}+\cdots+a_k(y)\}-W_1(\varkappa,\lambda)=0,\\ (2\mu)^{n+1}d^{*}\{b_0^{**}x^{l^{**}}+b_1^{**}(y)x^{l^{**}-1}+\cdots+b_{l^{**}}^{**}(y)\}-W_2(\varkappa,\lambda)=0.\end{array}\right.$$

Für diese Gleichungen sind wegen (41), (46), (47), (48) und (22) die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 erfüllt.

Es sei

$$(50)\qquad R=0$$

die Gleichung, welche man erhält, wenn man x aus den Gleichungen (49) eliminiert. Setzt man in (50) für y den Wert aus (46) ein, so läßt sich nach Hilfssatz 3 diese Gleichung in der folgenden Form schreiben:

$$(51)\qquad \begin{aligned}R=(-1)^k a_0^{l^{**}}W_2(\varkappa,\lambda)^k+V_1(\varkappa,\lambda)W_2(\varkappa,\lambda)^{k-1}+\cdots+V_{k-1}(\varkappa,\lambda)W_2(\varkappa,\lambda)\\ +(-1)^{l^{**}(k+1)}b_0^{**k}W_1(\varkappa,\lambda)^{l^{**}}+V^{*}(\varkappa,\lambda)=0.\end{aligned}$$

Hierbei gelten für die Gesamtgrade $v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}$ und v^{*} von $V_1(\varkappa,\lambda)$, $V_2(\varkappa,\lambda),\ldots,$ $V_{k-1}(\varkappa,\lambda)$ und $V^{*}(\varkappa,\lambda)$ in bezug auf $\varkappa$ und λ die Ungleichungen

$$v_\tau \leqq \frac{l^{**} n}{k}\,\tau \qquad (\tau = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{52}$$

und

$$v^* < l^{**} n\,. \tag{53}$$

Nun ist (51) eine diophantische Gleichung in $\varkappa$ und λ. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind wegen (20), (21), (47), (49), (41) und (46) Zahlen aus K; der Grad von K war h. Ferner war $W_2(\varkappa, \lambda)$ homogen von der Dimension n und hatte keine mehrfachen Linearfaktoren. Ebenso war $W_1(\varkappa, \lambda)$ homogen von der Dimension n; wegen (53) ist die Summe $S_k(\varkappa, \lambda)$ der Glieder höchster Dimension von

$$(-1)^{l^{**}(k+1)} b_0^{**k} W_1(\varkappa, \lambda)^{l^{**}} + V^*(\varkappa, \lambda):$$

$$S_k(\varkappa, \lambda) = (-1)^{l^{**}(k+1)} b_0^{**k} W_1(\varkappa, \lambda)^{l^{**}}. \tag{54}$$

Nun war $W_1(\varkappa, \lambda)$ zu $W_2(\varkappa, \lambda)$ teilerfremd; daher ist auch $S_k(\varkappa, \lambda)$ zu $W_2(\varkappa, \lambda)$ teilerfremd. Ferner folgt aus (54), daß die Dimension v_k von $S_k(\varkappa, \lambda)$

$$v_k = l^{**} n \tag{55}$$

ist. Man setze

$$s = \left[\frac{1}{2}\,(\sqrt{4n+1} - 1)\right].$$

Wenn man nun noch zeigen kann, daß

$$v_k < k\left\{n - h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\} \tag{56}$$

ist, so folgt aus dem am Schluß von § 1 genannten Satz wegen (52) und (55), daß die Gleichung (51) höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen $\varkappa$, λ aus K haben kann. Daher kommen wegen (46) für die Gleichung (19) nur endlich viele Lösungswerte y und also auch nur endlich viele Lösungswerte x in Betracht; denn für einen festen Wert von y verschwindet (19) nicht identisch, da die Koeffizienten der höchsten Potenz von x bzw. $a_0^2 \neq 0$ und $a_0^2 - b_0^2 \mu \neq 0$ sind.

Damit aber (56) erfüllt ist, genügt es wegen (55) zu zeigen, daß

$$n\,l^{**} < k\left\{n - h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)\right\},$$

daß also

$$n(k - l^{**}) > k\,h\left(\frac{n}{s+1} + s\right)$$

ist. Nun ist aber nach einem Hilfssatz des Herrn *C. Siegel* [8])

$$\frac{n}{s+1} + s \leqq \sqrt{4n+1} - 1\,.$$

Es genügt daher erst recht, zu zeigen, daß

$$n(k - l^{**}) > k\,h(\sqrt{4n+1} - 1),$$

also

$$n^2(k - l^{**})^2 + k^2 h^2 + 2\,n\,k\,h\,(k - l^{**}) > k^2 h^2 (4n + 1),$$

$$n\,(k - l^{**})^2 + 2\,k\,h\,(k - l^{**}) > 4\,k^2 h^2,$$

$$n > \frac{2\,k\,h\{2\,k\,h - (k - l^{**})\}}{(k - l^{**})^2}$$

---

[8]) Approximation algebraischer Zahlen. Mathematische Zeitschrift 10 (1921), Hilfssatz X, S. 191.

ist. Dies ist aber wegen (23) erfüllt. Daher gilt die Ungleichung (56), und Satz 1 ist bewiesen.

Satz 1 läßt sich auch folgendermaßen formulieren:

Satz 1*: *Es seien* $g(x, y)$ und $h(x, y)$ *Polynome mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K; *die Koeffizienten* a_0 *und* b_0 *der höchsten Potenzen von* x, *sowie der Koeffizient der höchsten Potenz von* x *in dem Polynom* $b_0 g(x, y) - a_0 h(x, y)$ *seien von* y *freie Konstanten. Ferner seien* $g(x, 0)$ *und* $h(x, 0)$ *als Polynome in* x *teilerfremd.* γ *und* μ *seien ganze Zahlen aus* K; *es sei* $\mathsf{K} \neq \mathsf{K}(\sqrt{\mu})$. *Dann hat für hinreichend großes positives ganzes rationales* n *die diophantische Gleichung*

$$g^2(x, y) - \mu h^2(x, y) = \gamma y^n$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y *aus* K.

Zusatz: *Ein ähnlicher Satz läßt sich für die Lösungen von* (19) *in ganzen algebraischen Zahlen von beschränktem Grade aufstellen.*

Der Satz 1 soll nun für den Spezialfall angewandt werden, daß $f(x, y)$ ein Polynom in x allein ist. Dann gilt der folgende

Satz 2: *Die Gleichung* $f(x) = 0$ *mit Koeffizienten aus dem algebraischen Zahlkörper* K *sei in* K *irreduzibel. Die zugehörige Galoissche Gruppe* $\mathfrak{G}$ *enthalte eine transitive Untergruppe* $\mathfrak{H}_0$, *die ihrerseits eine intransitive Untergruppe* $\mathfrak{H}_1$ *vom Index* 2 *besitze. Es sei* γ *eine Zahl aus* K. *Dann hat für hinreichend großes ganzes rationales* n *die diophantische Gleichung*

$$f(x) = \gamma y^n$$

nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y *aus* K.

Beweis: Die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ seien $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r$; es sei K_0 der zu $\mathfrak{H}_0$ gehörige Teilkörper von $\mathsf{K}(\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_r)$, K_1 der zu $\mathfrak{H}_1$ gehörige. Dann folgt aus der Voraussetzung, daß $f(x)$ in K_0 irreduzibel, in K_1 aber reduzibel ist. Da ferner $\mathfrak{H}_1$ vom Index 2 in bezug auf $\mathfrak{H}_0$ war, ist K_1 vom Relativgrad 2 in bezug auf K_0. Daher kann man setzen

$$\mathsf{K}_1 = \mathsf{K}_0(\sqrt{\mu}),$$

wo μ eine Zahl aus K_0 ist. Aus Satz 1, angewandt auf K_0 als Grundkörper, folgt jetzt die Behauptung.

Zusatz 1: *Ist* $f(x) = 0$ *eine Gleichung vom Grade* $2k$ *ohne Affekt mit algebraischen Koeffizienten, so sind die Voraussetzungen des Satzes* 2 *erfüllt.*

Beweis: Man kann als Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{G}$ die durch den Zyklus

$$z = (1, 2, 3, \ldots, 2k)$$

erzeugte Gruppe, als Gruppe $\mathfrak{H}_1$ die durch

$$z^2 = (1, 3, 5, \ldots, 2k - 1)(2, 4, 6, \ldots, 2k)$$

erzeugte Gruppe wählen.

Zusatz 2: *Es sei* $f(x)$ *ein irreduzibles Polynom 4-ten Grades mit Koeffizienten aus dem algebraischen Körper* K; γ *sei eine Zahl aus* K. *Dann hat für hinreichend großes ganzes rationales* n *die diophantische Gleichung*

$$f(x) = \gamma y^n \tag{57}$$

höchstens endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y *aus* K.

Beweis: Da die Galoissche Gruppe $\mathfrak{G}$ von $f(x) = 0$ transitiv ist, muß die Untergruppe $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$ derjenigen Permutationen, die die Ziffer 1 ungeändert lassen, den Index 4 in bezug auf $\mathfrak{G}$ haben. Die Ordnung g von $\mathfrak{G}$ muß also durch 4 teilbar sein.

Bei passender Numerierung der Wurzeln kommen daher für $\mathfrak{G}$ nur die folgenden Untergruppen von $\mathfrak{S}_4$ in Betracht:

1. $$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}_4.$$

Als Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ wähle man die folgende Sylow-Gruppe der Ordnung 8

$$(58)\quad \begin{cases} (1); \quad (1,2,3,4); \quad (1,3)(2,4); \quad (1,4,3,2); \\ (1,2)(3,4); \quad (1,4)(2,3); \quad (1,3); \quad (2,4). \end{cases}$$

Diese ist transitiv und besitzt die folgende intransitive Untergruppe vom Index 2

$$(1);\ (1,3);\ (2,4);\ (1,3)(2,4).$$

Diese wähle man als $\mathfrak{H}_1$.

2. $$\mathfrak{G} = \mathfrak{A}_4.$$

Für $\mathfrak{H}_0$ wähle man die Untergruppe

$$(1);\ (1,2)(3,4);\ (1,3)(2,4);\ (1,4)(2,3);$$

und für $\mathfrak{H}_1$

$$(1);\ (1,2)(3,4).$$

3. $\mathfrak{G}$ ist die durch (58) definierte Sylow-Gruppe. Man wähle

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{H}_1\colon\ (1);\ (1,3);\ (2,4);\ (1,3)(2,4).$$

4. Es ist

$$\mathfrak{G}\colon\ (1);\ (1,2,3,4);\ (1,3)(2,4);\ (1,4,3,2).$$

Man wähle

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G},$$
$$\mathfrak{H}_1\colon\ (1);\ (1,2)(3,4).$$

5. Es ist

$$\mathfrak{G}\colon\ (1);\ (1,2)(3,4);\ (1,3)(2,4);\ (1,4)(2,3).$$

Man wähle

$$\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{G}$$
$$\mathfrak{H}_1\colon\ (1);\ (1,2)(3,4).$$

In allen Fällen sind also die Voraussetzungen des Satzes 2 erfüllt. Daher hat die Gleichung (57) nur endlich viele Lösungen in ganzen Zahlen x, y aus K für hinreichend großes n.

Da der Index von $\mathfrak{H}_0$ in bezug auf $\mathfrak{G}$ entweder 1 oder 3 ist, hat man entweder $\mathsf{K}_0 = \mathsf{K}$ zu nehmen oder zu K eine kubische Irrationalität zu adjungieren.

Daß der Satz 2 nicht für alle irreduziblen Gleichungen geraden Grades mit algebraischen Koeffizienten gilt, zeigt das Beispiel derjenigen Gleichungen 12-ten Grades, deren Galoissche Gruppe die reguläre Darstellung von $\mathfrak{A}_4$ ist.

Eingegangen im März 1928.

Über Parallelverschiebung in der Weltgeometrie.

Von *Ludwig Schlesinger* in Gießen.

Nachdem ich die allgemeinen Erörterungen meiner Note „Parallelverschiebung und Krümmungstensor“ [1]) in deren letztem Abschnitt auf den Fall $m = n = 2$ der *Gauß*schen Flächentheorie angewandt habe, möchte ich im folgenden die Behandlung des Falles der Weltgeometrie $m = n = 4$ in Angriff nehmen. Ich schließe mich in den Bezeichnungen an die gedachte Note an.

I.

Es seien $t^k (k = 1, 2, 3, 4)$ die Koordinaten der amorphen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$, und es werde jedem Punkte von $\mathfrak{M}_4$ eine vierfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_4$ von Vektoren mit den kontravarianten Komponenten u^k zugeordnet. Der Zusammenhang zwischen den zu verschiedenen Punkten von $\mathfrak{M}_4$ gehörigen $\mathfrak{E}_4$ werde durch die *Levi-Civita*schen Gleichungen der Parallelverschiebung

$$(1) \qquad du^k + \sum_{\lambda=1}^{4} u^\lambda \sum_{r=1}^{4} \Gamma^k_{\lambda r}\, dt^r = 0, \qquad k = 1, 2, 3, 4$$

in Verbindung mit einer Führungskurve $\mathfrak{C}$ hergestellt, die durch die Gleichungen $t^k = \varphi_k(s)$, wo die φ_k stetig differenzierbare Funktionen bedeuten, gegeben wird. Wenn $u^k_i (i, k = 1, 2, 3, 4)$ die Komponenten von vier linear unabhängigen Vektoren von $\mathfrak{E}_4$ bedeuten, so schreibt sich das Differentialsystem (1) für die Führungskurve $\mathfrak{C}$

$$(1\,a) \qquad \frac{du^k_i}{ds} = \sum_{\lambda=1}^{4} u^\lambda_i a_{\lambda k}, \qquad a_{\lambda k} = -\sum_{r=1}^{4} \Gamma^k_{\lambda r} \frac{dt^r}{ds}.$$

Wir bilden nun die Determinanten 2. Ordnung der Matrix $(u^k_i) = U$

$$(2) \qquad u^{kl}_{\lambda\mu} = u^k_\lambda u^l_\mu - u^l_\lambda u^k_\mu \qquad (kl,\ \lambda\mu = 12, 13, 14, 23, 24, 34),$$

zwischen denen die identischen Relationen

$$(3) \qquad u^{12}_{\lambda\mu} u^{34}_{\lambda\mu} - u^{13}_{\lambda\mu} u^{24}_{\lambda\mu} + u^{14}_{\lambda\mu} u^{23}_{\lambda\mu} = 0$$

bestehen, dann befriedigen diese [2]) das sogenannte zweite assoziierte Differentialsystem von (1 a)

$$(4) \qquad \frac{du^{kl}}{ds} = \sum_{r=1}^{4} (u^{kr} a_{rl} + u^{rl} a_{rk})$$

oder, wenn wir für die $u^{kl}_{\lambda\mu}$ mit den Doppelindizes 12, 13, 14, 23, 24, 34 die U^k_i mit den einfachen Indizes 1, 2, 3, 4, 5, 6 schreiben,

$$(4\,a) \qquad \frac{dU^k_i}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{6} U^\lambda_i b_{\lambda k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, 6),$$

---

[1]) Math. Annalen **99** (1928), S. 413 ff; im folgenden zitiert als P. u. K. Vergl. auch den Bericht über meinen Kissinger Vortrag im Jahresbericht der D. M.-V. **37** (1928), S. *15* ff.

[2]) Siehe *L. Fuchs* (1898), Werke III, S. 285, vergl. auch *G. Darboux*, Comptes rendus **148** (1909), S. 748.

wo die Matrix der $b_{\lambda k}$ wie folgt lautet

$$(5)\quad (b_{\lambda k})_{\lambda,k=1,2,\ldots,6} = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{22} & a_{23} & a_{24} & -a_{13} & -a_{14} & 0 \\ a_{32} & a_{11}+a_{33} & a_{34} & a_{12} & 0 & -a_{14} \\ a_{42} & a_{43} & a_{11}+a_{44} & 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{31} & a_{21} & 0 & a_{22}+a_{33} & a_{34} & -a_{24} \\ -a_{41} & 0 & a_{21} & a_{43} & a_{22}+a_{44} & a_{23} \\ 0 & -a_{41} & a_{31} & -a_{42} & a_{32} & a_{33}+a_{44} \end{pmatrix}.$$

Wenn nun, wie wir im folgenden voraussetzen wollen, für die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{E}_4$ ein metrischer Tensor (g_{ik}) vorhanden ist, d. h. wenn das Differentialsystem (1) mit seinem adjungierten

$$(6)\qquad du_k - \sum_{\lambda=1}^{4} u_\lambda \sum_{r=1}^{4} \Gamma_{kr}^{\lambda} dt^r = 0$$

durch die Artbeziehung

$$(7)\qquad u_k = \sum_{\lambda=1}^{4} u^\lambda g_{\lambda k}$$

verknüpft ist, wo die $g_{\lambda k}$ differenzierbare Funktionen der t^1, t^2, t^3, t^4 bedeuten, für die $g_{ik} = g_{ki}$ gilt, so ist nach einem Satze von *Fuchs* (siehe P. u. K., S. 431) das System (4) für jede Wahl der Integrationskurve $\mathfrak{C}$ reduzibel, d. h. es ist das Differentialsystem

$$(6\,a)\qquad dU^k + \sum_{\lambda=1}^{6} U^\lambda \sum_{r=1}^{4} \Delta_{\lambda r}^{k} dt^r = 0$$

reduzibel, wo wir

$$(8)\qquad b_{\lambda k} ds = -\sum_{r=1}^{4} \Delta_{\lambda r}^{k} dt^r \qquad (\lambda, k = 1, 2, \ldots, 6)$$

gesetzt haben; hierin sind also die $(\Delta_{\lambda r}^{k})$ $(\lambda, k = 1, 2, \ldots, 6;\ r = 1, 2, 3, 4)$ aus den $\Gamma_{\lambda r}^{k}$ $(\lambda, k, r = 1, 2, 3, 4)$ ebenso gebildet, wie gemäß (5) die $(b_{\lambda k})$ aus den $a_{\lambda k}$.

II.

Um in die Art der Reduzibilität des Systems (6 a) Einsicht zu gewinnen, empfiehlt es sich, das System (1) selbst einer Transformation zu unterwerfen [3]), wodurch dieses System in ein sich selbst adjungiertes übergeht. Wenn wir mit $\tilde{U}$ die kovariante Komponentenmatrix der Vektorbasis u_i^k bezeichnen, so daß also die Artbeziehung (7) als Matrizengleichung in der Form

$$(7\,a)\qquad \tilde{U} = UG$$

geschrieben werden kann, so wollen wir von (1) zu einem Differentialsystem derselben Art durch die Gleichungen

$$(9)\qquad v^k = \sum_l u^l h_{lk}$$

oder in Matrizenform

$$(9\,a)\qquad V = UH$$

übergehen, wo die h_{lk} differenzierbare Funktionen der t^1, t^2, t^3, t^4 bedeuten. Für die kovariante Komponentenmatrix gilt dann

$$(10)\qquad \tilde{V} = \tilde{U}(\bar{H})^{-1},$$

wo $\bar{H}$ die transponierte Matrix H bedeutet, und es soll nun H so bestimmt werden, daß sich

$$(11)\qquad \tilde{V} = V$$

[3]) Vergl. *Levi-Civita*, Rendiconti di Palermo **XLII** (1917), S. 188.

ergibt, also so, daß

$$\widetilde{U} = U H \bar{H} \tag{12}$$

und daher

$$G = H \bar{H} \tag{13}$$

ist. Die quadratische Form

$$\sum_{i,k} g_{ik} u^i u^k = \sum_{i,k} g^{ik} u_i u_k = \sum_k u^k u_k = \text{const.} \tag{14}$$

verwandelt sich somit durch die Transformation (9) in

$$\sum_k (v^k)^2 = \sum_k (v_k)^2 , \tag{15}$$

d. h. also in eine Summe von Quadraten. Wenn H_0 eine bestimmte Matrix von dieser Beschaffenheit ist, so ergibt sich die allgemeinste Matrix H, die dasselbe leistet, wie folgt. Es muß sein

$$H \bar{H} = H_0 \bar{H}_0 , \tag{16}$$

also, wenn wir

$$H_0^{-1} H = K \tag{17}$$

setzen, $K = (\bar{K})^{-1}$, d. h. aber [4]), daß K die Matrix einer orthogonalen Transformation ist, was ja auch daher einleuchtet, daß durch die Transformation K die quadratische Form (15) in sich selbst übergehen muß. Wir erhalten also die allgemeinste Matrix H, indem wir eine spezielle solche Matrix H_0 von links her komponieren mit der allgemeinsten orthogonalen Matrix K, deren Elemente differenzierbare Funktionen der t^1, t^2, t^3, t^4 sind. Um nun eine solche spezielle Matrix H_0 zu finden, wenden wir z. B. die von *Jacobi* [5]) angegebene Transformation an, die die quadratische Form (14) in eine Summe von Quadraten verwandelt [6]),

$$\begin{aligned}
v^1 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \sum_{k=1}^{4} g_{1k} u^k , \\
v^2 &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} u^2 + g_{13} u^3 + g_{14} u^4 \\ g_{21} & g_{22} u^2 + g_{23} u^3 + g_{24} u^4 \end{vmatrix} , \\
v^3 &= \frac{1}{\sqrt{(g_{11} g_{22} - g_{12}^2) g^{44} g}} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} u^3 + g_{14} u^4 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} u^3 + g_{24} u^4 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} u^3 + g_{34} u^4 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{(g^{44} u^3 - g^{43} u^4)^2 g}{(g_{11} g_{22} - g_{12}^2) g^{44}}} , \\
v^4 &= \frac{u^4}{\sqrt{g^{44}}} ,
\end{aligned} \tag{18}$$

woraus sich auch sofort die inverse Transformation H^{-1} in der Form

$$\begin{aligned}
u^1 &= \frac{v^1}{\sqrt{g_{11}}} - \frac{g_{12} v^2}{\sqrt{g_{11}(g_{11} g_{22} - g_{12}^2)}} + \frac{g_{12} g_{23} - g_{13} g_{22}}{\sqrt{g g^{44}} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} v^3 + \frac{g^{41}}{\sqrt{g^{44}}} v^4 , \\
u^2 &= \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} v^2 - \frac{g_{11} g_{23} - g_{12} g_{13}}{\sqrt{g g^{44}} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}} v^3 + \frac{g^{42}}{\sqrt{g^{44}}} v^4 , \\
u^3 &= \sqrt{\frac{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}{g g^{44}}} v^3 + \frac{g^{43}}{\sqrt{g^{44}}} v^4 , \\
u^4 &= \sqrt{g^{44}} v^4
\end{aligned} \tag{19}$$

[4]) Vergl. etwa *P. Muth*, Elementarteiler, 1899, S. 30.

[5]) *C. G. J. Jacobi*, Werke III, S. 590.

[6]) Diese Transformation entspricht der in P. u. K. für $n=2$ angewandten Transformation (64), S. 432.

ergibt, wo $g = |g_{ik}|(i, k = 1, 2, 3, 4)$ gesetzt wurde. Die Ausführung dieser Transformation in dem Differentialsystem (1) bzw. (1 a) gestaltet sich verhältnismäßig einfach, weil man ja von vornherein weiß, daß das Differentialsystem, dem die v^1, v^2, v^3, v^4 genügen, mit seinem adjungierten übereinstimmen, also eine schiefsymmetrische Koeffizientenmatrix besitzen muß. Setzen wir also

$$\frac{dv^k}{ds} = \sum_{\lambda=1}^{4} v^\lambda c_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{20}$$

so muß $c_{\lambda k} = -c_{k\lambda}$, also $c_{kk} = 0$ sein, und man findet

$$\begin{aligned}
c_{21} &= \frac{1}{g_{11}\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}\,(-(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\,a_{12} + (g_{12}g_{13} - g_{11}g_{23})\,a_{13} \\
&\qquad - (g_{11}g_{24} - g_{12}g_{14})\,a_{14}), \\
c_{31} &= \frac{-\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}g^{44}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}}\,(g^{44}a_{13} - g^{43}a_{14}), \\
c_{41} &= \frac{-a_{14}}{\sqrt{g^{44}g_{11}}}, \qquad (21) \\
c_{32} &= \frac{-\sqrt{g}}{\sqrt{g_{11}g^{44}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}}\,(g^{44}(g_{11}a_{23} - g_{12}a_{13}) - g^{43}(g_{11}a_{24} - g_{12}a_{14})), \\
c_{42} &= \frac{g_{12}a_{14} - g_{11}a_{24}}{\sqrt{g_{11}g^{44}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}}, \\
c_{43} &= \frac{1}{g^{44}\sqrt{g(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}}\,(-(g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22})\,a_{14} + (g_{11}g_{23} - g_{12}g_{13})\,a_{24} \\
&\qquad - (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)\,a_{34}).
\end{aligned}$$

Bemerkenswert ist, daß in diesen Ausdrücken der c_{ik} von den Koeffizienten a_{ik} des Systems (1 a) nur diejenigen vorkommen, für die $k > i$ ist, ähnlich wie im Falle $n = 2$ das entsprechende Differentialsystem (P. u. K., Gleichung (65), S. 432) nur den Koeffizienten $a_{12}ds = -(\Gamma_{11}^2 dt^1 + \Gamma_{12}^2 dt^2)$ enthält.

Aus der schiefen Symmetrie der Koeffizientenmatrix (c_{ik}) folgt in sehr bekannter Weise das quadratische Integral

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 + (v^4)^2 = \text{const.} \tag{22}$$

III.

Wir wollen nun für das Differentialsystem (20) mit der schiefsymmetrischen Koeffizientenmatrix (c_{ik}) das zweite assoziierte System

$$\frac{dV^k}{ds} = \sum_{\lambda=1}^{6} V^\lambda e_{\lambda k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 6) \tag{23}$$

bilden, wo die Matrix der (e_{ik}) nach (5) jetzt wie folgt geschrieben werden kann

$$(e_{ik}) = \begin{pmatrix}
0 & c_{23} & c_{24} & -c_{13} & -c_{14} & 0 \\
-c_{23} & 0 & c_{34} & c_{12} & 0 & -c_{14} \\
-c_{24} & -c_{34} & 0 & 0 & c_{12} & c_{13} \\
c_{13} & -c_{12} & 0 & 0 & c_{34} & -c_{24} \\
c_{14} & 0 & -c_{12} & -c_{34} & 0 & c_{23} \\
0 & c_{14} & -c_{13} & c_{24} & -c_{23} & 0
\end{pmatrix}. \tag{24}$$

Das Koeffizientensystem von (23) ist also selbst schiefsymmetrisch und hat darüber hinaus noch die Besonderheit, daß

$$(25)\qquad \begin{array}{llll} e_{16}=0, & e_{25}=0, & e_{34}=0, & e_{15}=e_{26}, \quad e_{24}=e_{35}, \\ e_{12}=e_{56}, & e_{23}=e_{45}, & e_{14}=-e_{36}, & e_{13}=-e_{46} \end{array}$$

ist. Die Reduzibilität des Systems (23) läßt sich nun unmittelbar und zwar in sehr bemerkenswerter Weise zur Evidenz bringen. Setzen wir nämlich

$$(26)\qquad \begin{array}{ll} V^1 - V^6 = p^1, & V^1 + V^6 = q^1, \\ V^2 + V^5 = p^2, & V^2 - V^5 = q^2, \\ V^3 - V^4 = p^3, & V^3 + V^4 = q^3, \end{array}$$

d. h. transformieren wir das System (23), indem wir seine Integralmatrix V_i^k von rechts her mit der *konstanten* Matrix

$$(27)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E$$

komponieren, so erhalten wir für p^1, p^2, p^3 einerseits und für q^1, q^2, q^3 andererseits die Differentialsysteme

$$(28)\qquad \begin{cases} \dfrac{dp^1}{ds} = p^2\alpha_3 - p^3\alpha_2, \\ \dfrac{dp^2}{ds} = p^3\alpha_1 - p^1\alpha_3, \\ \dfrac{dp^3}{ds} = p^1\alpha_2 - p^2\alpha_1, \end{cases}$$

$$(29)\qquad \begin{cases} \dfrac{dq^1}{ds} = q^2\beta_3 - q^3\beta_2, \\ \dfrac{dq^2}{ds} = q^3\beta_1 - q^1\beta_3, \\ \dfrac{dq^3}{ds} = q^1\beta_2 - q^2\beta_1, \end{cases}$$

wo wir gesetzt haben

$$(30)\qquad \begin{cases} c_{12} - c_{34} = \alpha_1, & c_{12} + c_{34} = \beta_1, \\ c_{13} + c_{24} = \alpha_2, & c_{13} - c_{24} = \beta_2, \\ c_{14} - c_{23} = \alpha_3, & c_{14} + c_{21} = \beta_3. \end{cases}$$

Durch die Transformation (26) zerfällt also das System (23) für sechs Unbekannte in die beiden Systeme (28), (29) mit je drei Unbekannten, d. h. die Koeffizientenmatrix des Systems, das aus (23) durch die Transformation (26) hervorgeht [7]), hat die Form

$$(30\,a)\qquad E^{-1}(e_{ik})\,E = \begin{pmatrix} 0 & -c_{14}+c_{23} & c_{13}+c_{24} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14}-c_{23} & 0 & -c_{12}+c_{34} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{13}-c_{24} & c_{12}-c_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{14}-c_{23} & c_{13}-c_{24} \\ 0 & 0 & 0 & c_{14}+c_{23} & 0 & -c_{12}-c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{13}+c_{24} & c_{12}+c_{34} & 0 \end{pmatrix}.$$

[7]) Allgemein wäre die Koeffizientenmatrix des transformierten Systems (siehe P. u. K., Gleichung (42 a), S. 424)

$$E^{-1}(e_{ik})\,E + E^{-1}\frac{dE}{ds},$$

aber da E konstant ist, bleibt nur das erste Glied übrig.

Die Systeme (28), (29) sind von der aus der klassischen Mechanik wohlbekannten Form, durch die die Lage eines starren Körpers bestimmt wird, wenn etwa die Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in (28) in jedem Zeitmoment s die Komponenten der instantanen Rotation in Bezug auf ein mit dem Körper fest verbundenes Koordinatensystem bedeuten. Die quadratischen Integrale von (28), (29) geben nichts Neues, da z. B. $\sum_{k=1}^{3} (p^k)^2 = \text{const.}$ vermöge der identischen Relation

$$V^1 V^6 - V^2 V^5 + V^3 V^4 = 0$$

einfach ergibt

$$\sum_{k=1}^{6} (V^k)^2 = \text{const.}\,, \tag{31}$$

was (vgl. oben (22)) eine direkte Folge der schiefen Symmetrie der Koeffizientenmatrix des Systems (23) ist.

IV.

Wir betrachten nun die zu den Differentialsystemen (20), (23), (28), (29) gehörigen Krümmungstensoren. Setzen wir (vgl. (1 a))

$$\begin{aligned} a_{\lambda k}\, ds &= -\sum_{r=1}^{4} \Gamma^k_{\lambda r}\, dt^r\,, \\ c_{\lambda k}\, ds &= -\sum_{r=1}^{4} \mathsf{E}^k_{\lambda r}\, dt^r\,, \end{aligned} \qquad (\lambda, k = 1, 2, 3, 4) \tag{32}$$

so besteht zwischen den Matrizen $\Gamma_r = (\Gamma^k_{\lambda r})$ und $\mathsf{E}_r = (\mathsf{E}^k_{\lambda r})$ vermöge der Transformation (9 a), die das Differentialsystem (1) in das zu derselben Art gehörige Differentialsystem (20) überführt, die Beziehung (vgl. P. u. K., Gleichung (42 a), S. 424)

$$\mathsf{E}_r = H^{-1}\, \Gamma_r\, H - H^{-1}\, \frac{\partial H}{\partial t^r}\,. \tag{33}$$

Daraus ergibt sich durch einfache Rechnung zwischen dem Krümmungstensor

$$(R_{rs})_\Gamma = \frac{\partial \Gamma_s}{\partial t^r} - \frac{\partial \Gamma_r}{\partial t^s} + \Gamma_s \Gamma_r - \Gamma_r \Gamma_s \tag{34}$$

von (1) und dem Krümmungstensor

$$(R_{rs})_\mathsf{E} = \frac{\partial \mathsf{E}_s}{\partial t^r} - \frac{\partial \mathsf{E}_r}{\partial t^s} + \mathsf{E}_s \mathsf{E}_r - \mathsf{E}_r \mathsf{E}_s \tag{35}$$

von (20) die Beziehung [8])

$$(R_{rs})_\mathsf{E} = H^{-1} (R_{rs})_\Gamma H\,. \tag{36}$$

Aus der schiefen Symmetrie der Matrizen E_r folgt, wie die Darstellung (35) unmittelbar erkennen läßt, daß auch die Matrizen $(R_{rs})_\mathsf{E}$ des zu (20) gehörigen Krümmungstensors schiefsymmetrisch sind, d. h. es ist

$$(R^\beta_{\alpha sr})_\mathsf{E} = -\,(R^\alpha_{\beta sr})_\mathsf{E}\,;$$

da ja allgemein $R_{sr} = -\,R_{rs}$ gilt, so gibt es also sechs wesentlich verschiedene Matrizen $(R_{rs})_\mathsf{E}$, und jede derselben enthält wieder sechs wesentlich verschiedene Elemente. Die

---

[8]) Vergl. P. u. K., Gleichung (48), S. 425. In dieser und der vorhergehenden Formel der Note P. u. K. sind Druckfehler stehengeblieben. Die Formeln müssen lauten

$$T_B = H_0^{-1}\, T_\Gamma H$$

und (48)

$$(R_{rs})_B = H^{-1} (R_{rs})_\Gamma H.$$

explizite Form dieser 36 Elemente läßt sich auf Grund der Formeln der Nr. II ohne weiteres hinschreiben.

Bei der Bildung des Krümmungstensors für das zweite assoziierte System (4) von (1) bereiten die in der Darstellung (5) der Koeffizientenmatrix von (4) auftretenden Diagonalglieder von der Form $a_{ii} + a_{kk}$ Schwierigkeiten. Diese fallen weg für das zweite assoziierte System (23) von (20), weil in dessen Koeffizientenmatrix jene Diagonalglieder vermöge der schiefen Symmetrie gleich Null sind. Bezeichnen wir also die Matrizen des Krümmungstensors von (23) mit $(R_{rs})_H$, so sind diese schiefsymmetrischen Matrizen von 36 Elementen aus den Elementen der Matrizen $(R_{rs})_E$ genau ebenso gebildet, wie die (e_{ik}) nach Gleichung (24) aus den (c_{ik}). Aus den $(R_{rs})_H$ erhalten wir endlich die Matrizen des Krümmungstensors des in die beiden Systeme (28), (29) zerfällten Systems für sechs Unbekannte (vgl. Gleichung (36)) in der Form

$$E^{-1}(R_{rs})_H E, \tag{37}$$

und diese Matrizen zerfallen ihrerseits wieder in je zwei Matrizen von 9 Elementen, die nichts anderes sind, als die Matrizen des Krümmungstensors der beiden Systeme (28), (29). Die Matrizen (37) sind also aus den Elementen der schiefsymmetrischen Matrizen $(R_{rs})_E$ ebenso gebildet, wie in der Gleichung (30 a) die dort stehende Matrix aus den Elementen der schiefsymmetrischen Matrix (c_{ik}) gebildet ist. Wendet man die verallgemeinerte *Stokes*sche Formel (P. u. K., Gleichung (34 a), S. 422) auf das zerfallende System (28), (29) an, so zerfällt auch diese in die beiden, jenen Systemen für drei Unbekannte entsprechenden Formeln. Die Diskussion dieser Gleichungen muß einer späteren Note vorbehalten bleiben.

Eingegangen 23. Juni 1928.

Zur Theorie des *Borchardt*schen Mittels. I.

Von *Harald Geppert* in Gießen, z. Z. Rom *).

In zwei Abhandlungen aus den Jahren 1876 und 1878 [1]) hat *Borchardt* die Theorie eines Algorithmus aus vier Elementen a, b, c, e entwickelt, der eine Verallgemeinerung des zum arithmetisch-geometrischen Mittel führenden *Gauß*schen Algorithmus darstellt. Wie das *Gauß*sche Mittel mit dem vollständigen elliptischen Integral, so hängt das *Borchardt*sche Mittel mit den Periodizitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrals zusammen, und wie jener Algorithmus durch die elliptischen, so wird dieser durch die hyperelliptischen Thetafunktionen uniformisiert. Das *Borchardt*sche Mittel ist die Übertragung des für $p = 1$ gültigen *Gauß*schen Mittels auf den Fall $p = 2$. In den Arbeiten von *Borchardt* und *Hettner* [2]) ist diese Funktion vorwiegend vom algebraischen Gesichtspunkt aus und für reelle positive Werte der Ausgangselemente untersucht worden. Hingegen wollen wir in diesem und den folgenden Aufsätzen das *Borchardt*sche Mittel vom funktionentheoretischen Standpunkt aus studieren, in analoger Weise, wie *Gauß* seinerzeit die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels entwickelt hat [3]). Dazu ist es notwendig, den Elementen a, b, c, e beliebige komplexe Werte zu erteilen. Wir erledigen zunächst den Konvergenzbeweis für den allgemeinen Algorithmus; das Mittel ergibt sich als eine sehr interessante analytische Funktion von drei Variablen, die unendlich vieldeutig verzweigt ist. Man kommt ihr erheblich näher, wenn man den Algorithmus mittels der *Rosenhain*schen Thetas durch Einführung dreier neuer Variabeln uniformisiert; wir entwickeln diese Uniformisierung und zeigen, daß sich die, offenbar in transzendenter Weise mit den ursprünglichen Veränderlichen verknüpften, uniformisierenden Variablen als Grenzwerte eines sehr einfachen algebraischen Algorithmus herstellen lassen. Späteren Arbeiten bleibt es vorbehalten, auf Grund dieser Uniformisierung den Zusammenhang der unendlich vielen Zweige des Mittels herauszuarbeiten.

§ 1. Konvergenz des *Borchardt*schen Algorithmus.

Es seien a, b, c, e vier beliebige komplexe Zahlen, die wir uns so bezeichnet denken, daß

$$|a| \geqq |b| \geqq |c| \geqq |e| \tag{1.1}$$

ist. Der *Borchardt*sche Algorithmus besteht in der Bildung der nachstehenden Größenfolge

---

*) Fellow of the International Education Board.

[1]) Monatsber. d. Königl. Akad. d. Wiss. Berlin 1876, S. 611; Abhandlungen d. Königl. Akad. d. Wiss. Berlin 1878, S. 33, (mit A zitiert).

[2]) Journal f. reine u. angew. Math. **89**, 1880, S. 221; **112**, 1893, S. 89.

[3]) Vgl. *C. F. Gauß*, Nachlaß zur Theorie der arithm.-geom. Mittels u. d. Modulfunktion, herausgeg. von *H. Geppert*, Ostwalds Klassiker 225 (1927), (mit G zitiert).

$$
\begin{aligned}
a_\nu &= \frac{1}{4}\,(a_{\nu-1} + b_{\nu-1} + c_{\nu-1} + e_{\nu-1}),\\
b_\nu &= \frac{1}{2}\,(\sqrt{a_{\nu-1}\,b_{\nu-1}} + \sqrt{c_{\nu-1}\,e_{\nu-1}}),\\
c_\nu &= \frac{1}{2}\,(\sqrt{a_{\nu-1}\,c_{\nu-1}} + \sqrt{b_{\nu-1}\,e_{\nu-1}}),\\
e_\nu &= \frac{1}{2}\,(\sqrt{a_{\nu-1}\,e_{\nu-1}} + \sqrt{b_{\nu-1}\,c_{\nu-1}});
\end{aligned}
\qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1.2}
$$

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ c_0 = c,\ e_0 = e.$$

In diesen Gleichungen dürfen die Vorzeichen der sechs Quadratwurzeln beliebig gewählt werden, so daß bei jedem Schritt $2^6 = 64$ verschiedene Quadrupel $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ entstehen können. Es gibt infolgedessen zu vorgelegten Ausgangselementen a_0, b_0, c_0, e_0 unendlich viele mögliche Algorithmen, und zwar ist deren Mächtigkeit gleich derjenigen der Zahlen des 64er-Systems, also gleich der des Kontinuums. Jeder dieser unendlichvielen Algorithmen konvergiert, wie wir zeigen werden, gegen einen bestimmten Grenzwert

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \lim_{\nu\to\infty} c_\nu = \lim_{\nu\to\infty} e_\nu = \mathfrak{M}(a, b, c, e) \tag{1.3}$$

den wir als das *Borchardtsche Mittel* der Ausgangselemente bezeichnen.

Einen dieser Algorithmen zeichnen wir als Normalalgorithmus aus, nämlich denjenigen, bei dem die Quadratwurzeln sämtlich stets so gewählt werden, daß

$$
\begin{aligned}
&\Re\left(\frac{\sqrt{a_\nu\,b_\nu}}{a_\nu}\right) \geqq 0, \quad \Re\left(\frac{\sqrt{a_\nu\,c_\nu}}{a_\nu}\right) \geqq 0, \quad \Re\left(\frac{\sqrt{a_\nu\,e_\nu}}{a_\nu}\right) \geqq 0,\\
&\Re\left(\frac{\sqrt{b_\nu\,c_\nu}}{b_\nu}\right) \geqq 0, \quad \Re\left(\frac{\sqrt{b_\nu\,e_\nu}}{b_\nu}\right) \geqq 0, \quad \Re\left(\frac{\sqrt{c_\nu\,e_\nu}}{c_\nu}\right) \geqq 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

ist, oder, geometrisch gedeutet, bei dem die den Faktoren des Radikanden zunächst gelegenen Wurzelwerte genommen werden. In (1. 4) kann im Nenner jeweils auch der andere Faktor des Radikanden gesetzt werden. Durch (1. 4) ist der Algorithmus i. a. eindeutig bestimmt und führt zu dem *einfachsten Mittel* $M(a, b, c, e)$ [4]. Über den Fall der Mehrdeutigkeit des einfachsten Mittels werden wir später einiges sagen.

Wir beweisen zunächst die Konvergenz des Normalalgorithmus und werden daraus diejenige des allgemeinen Prozesses (1. 2) erschließen. Den Konvergenzbeweis führen wir geometrisch und schicken dazu zwei Bemerkungen voraus.

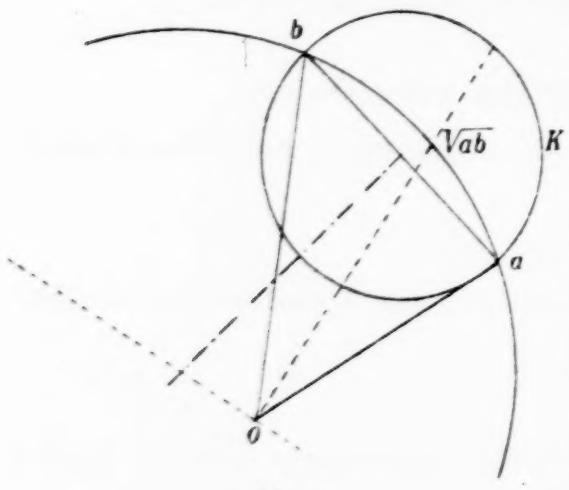

Fig. 1.

1. Man konstruiert die Quadratwurzel aus dem Produkt zweier komplexen Zahlen a, b am einfachsten dadurch, daß man die äußere Winkelhalbierende der Vektoren $0\,a$, $0\,b$ mit der Mittelsenkrechten auf $a\,b$ schneidet und um den Schnittpunkt als Mittelpunkt den Kreis durch a, b schlägt, der die innere Winkelhalbierende in $\pm\sqrt{ab}$ trifft (Fig. 1). Nimmt man für $\sqrt{ab}$ den zu a, b am nächsten liegenden Wert, für den also

[4]) In Anlehnung an die *Gauß*sche Bezeichnung, vgl. G, S. 137, so genannt.

$\Re\left(\frac{\sqrt{ab}}{a}\right) > 0$, $\Re\left(\frac{\sqrt{ab}}{b}\right) > 0$ ist, so ist der Winkel $(a, \sqrt{ab}, b)$ Peripheriewinkel über einem überstumpfen Bogen, also selbst größer als $\frac{\pi}{2}$, d. h. dieser Wert von $\sqrt{ab}$ liegt *innerhalb* des um $\frac{a+b}{2}$ mit dem Radius $\frac{1}{2}|a-b|$ geschlagenen Kreises K durch a und b.

2. Hat man zwei Kreise K_1, K_2 um die Mittelpunkte a, b mit den Radien r_1 bzw. r_2, und bildet man aus allen Punkten P_1 aus K_1 in Verbindung mit allen Punkten P_2 aus K_2 die „Durchschnittspunkte" $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$, so erfüllen diese wieder einen Kreis mit dem Mittelpunkt $\frac{1}{2}(a+b)$ und dem Radius $\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$, wie man leicht analytisch beweisen kann. Denn aus

$$|P_1 - a| \leqq r_1, \quad |P_2 - b| \leqq r_2$$

folgt

$$\left|\frac{P_1 + P_2}{2} - \frac{a+b}{2}\right| \leqq \frac{|P_1 - a| + |P_2 - b|}{2} \leqq \frac{r_1 + r_2}{2},$$

und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn

$$|P_1 - a| = r_1, \quad |P_2 - b| = r_2, \quad \arg(P_1 - a) = \arg(P_2 - b)$$

ist, also P_1, P_2 Punkte der Kreisperipherien sind, die mit dem Ähnlichkeitszentrum auf einer Geraden liegen.

Nach diesen Bemerkungen ergibt sich der Konvergenzbeweis für den Normalalgorithmus sofort. Bei diesem liegen nämlich nach Definition die sechs Wurzeln $\sqrt{ab}$, $\sqrt{ac}$, $\sqrt{ae}$, $\sqrt{bc}$, $\sqrt{be}$, $\sqrt{ce}$ innerhalb der Kreise mit den Mittelpunkten $\frac{a+b}{2}$, $\frac{a+c}{2}, \ldots, \frac{c+e}{2}$ und den Radien $\frac{1}{2}|a-b|, \ldots, \frac{1}{2}|c-e|$ bzw. Somit kommt b_1 innerhalb des Kreises um den Mittelpunkt $\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2} + \frac{c+e}{2}\right) = a_1$ mit dem Radius

$$r^{(1)} = \frac{1}{4}\{|a-b| + |c-e|\}$$

zu liegen und gleicherweise fallen c_1 und e_1 in die Kreise mit dem Mittelpunkt a_1 und den Radien

$$r^{(2)} = \frac{1}{4}\{|a-c| + |b-e|\} \text{ bzw. } r^{(3)} = \frac{1}{4}\{|a-e| + |b-c|\}.$$

Es sei nun

$$r_1 = \max\{r^{(1)}, r^{(2)}, r^{(3)}\},$$

dann ist jedenfalls r_1 nicht größer als die halbe Maximalentfernung der ursprünglichen Punkte a, b, c, e untereinander, und die Elemente a_1, b_1, c_1, e_1 liegen innerhalb des Kreises K_1 mit r_1 um a_1. Durch Wiederholung desselben Schlusses finden wir nun, daß a_2, b_2, c_2, e_2 innerhalb des Kreises K_2 mit r_2 um a_2 liegen, wobei

$$r_2 = \frac{1}{4}\max\{|a_1 - b_1| + |c_1 - e_1|;\ |a_1 - c_1| + |b_1 - e_1|;\ |a_1 - e_1| + |b_1 - c_1|\} \leqq \frac{3}{4} r_1$$

ist; a_3, b_3, c_3, e_3 fallen in den Kreis K_3 um a_3 mit dem Radius

$$r_3 \leqq \frac{3}{4} r_2 \leqq \frac{9}{16} r_1$$

usf. Nun kann a_2 von a_1 höchstens den Abstand $\frac{3}{4} r_1$, allgemein a_ν von $a_{\nu-1}$ höchstens die Distanz $\frac{3}{4} r_{\nu-1}$ haben, da

$$|a_2 - a_1| \leqq \frac{|b_1 - a_1| + |c_1 - a_1| + |e_1 - a_1|}{4} \leqq \frac{3}{4} r_1$$

ist; daher ist die maximale Entfernung eines Punktes des Kreises K_2 von a_1 höchstens gleich $\frac{3}{4} r_1 + \frac{3}{4} r_1 = \frac{3}{2} r_1$, allgemein die Maximaldistanz zwischen den Punkten von K_ν und $a_{\nu-1}$ höchstens gleich $\frac{3}{2} r_{\nu-1}$. Somit liegen die Kreise $K_1, K_2, K_3, \ldots$ sämtlich innerhalb des Kreises k_1 um a_1 als Mittelpunkt mit dem Radius

$$\varrho_1 = r_1 \left\{1 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \cdots\right)\right\} = 3r_1,$$

die Kreise $K_2, K_3, \ldots$ innerhalb des Kreises k_2 um a_2 mit $\varrho_2 = 3r_2 \leqq \frac{9}{4} r_1$, allgemein $K_\nu, K_{\nu+1}, K_{\nu+2}, \ldots$ innerhalb des Kreises k_ν um a_ν mit $\varrho_\nu = 3r_\nu \leqq \frac{3^\nu}{4^{\nu-1}} r_1$; innerhalb k_ν liegen also alle Elementquadrupel $a_\mu, b_\mu, c_\mu, e_\mu$ unseres Algorithmus, für die $\mu \geqq \nu$ ist. Andererseits bilden die k_ν eine Folge ineinander geschachtelter Kreise mit gegen Null abnehmenden Radien, d. h. die $a_\mu, b_\mu, c_\mu, e_\mu$ konvergieren mit $\mu \to \infty$ gegen einen bestimmten Grenzwert, eben das einfachste Mittel $M(a, b, c, e)$.

Aus dieser Tatsache folgt nun leicht die Konvergenz des allgemeinen Algorithmus (1. 2). Wir unterscheiden vorerst die möglichen Algorithmen in *reguläre* und *irreguläre*, indem wir als regulär einen solchen Algorithmus bezeichnen, der die Bedingungen (1. 4), wenn nicht von Anfang an, so doch von einer gewissen Stelle ab, also etwa für $\nu \geqq k$ dauernd befriedigt. Die Anzahl der regulären Algorithmen ist zwar unendlich, aber ihre Mächtigkeit ist abzählbar. Daher ist die Mächtigkeit der irregulären Algorithmen, also derjenigen, bei denen die Quadratwurzelbestimmung niemals ständig der Bedingung (1. 4) genügt, die des Kontinuums. Für die regulären Algorithmen ist der Beweis der Konvergenz durch das Vorangehende mit erbracht, indem unsere Betrachtungen erst von der k-ten Stelle ab anzusetzen sind. Von den irregulären Algorithmen zeigen wir: 1. daß sie konvergieren, 2. daß ihr Grenzwert immer Null ist.

Nach (1. 1) und (1. 2) ist

$$|a_1| \leqq \frac{1}{4}\{|a| + |b| + |c| + |e|\} \leqq |a|,$$

und die Gleichheitszeichen gelten nur, wenn $a = b = c = e$ ist. Ebenso ist

$$|b_1| \leqq \frac{1}{2}\{\sqrt{|ab|} + \sqrt{|ce|}\} \leqq \frac{1}{2}(|a| + |c|) \leqq |a|,$$

$$|c_1| \leqq |a|, \; |e_1| \leqq |a|,$$

und die Gleichheitszeichen gelten nur, wenn $|a| = |b| = |c| = |e|$, und $ab = ce$, $ac = be$, $ae = bc$ ist. Setzen wir daher

$$A_\nu = \max\{|a_\nu|, |b_\nu|, |c_\nu|, |e_\nu|\},$$

so bilden die A_ν eine monoton abnehmende Zahlenfolge, die notwendig einen Grenzwert hat. Dieser ist entweder gleich Null, und dann ist also

$$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lim_{\nu\to\infty} b_\nu = \lim_{\nu\to\infty} c_\nu = \lim_{\nu\to\infty} e_\nu = 0,$$

mithin der Algorithmus konvergent, oder von Null verschieden:

$$\lim_{\nu\to\infty} A_\nu = A > 0;$$

im letzteren Falle werden wir den zugehörigen Algorithmus als regulär nachweisen, womit dann alles bewiesen ist. Es ist dann nämlich bei beliebig kleinem positiven ε

$$A_n - A < \varepsilon, \quad \text{wenn} \quad n \geqq N(\varepsilon);$$

nehmen wir $\varepsilon < \frac{A}{7}$, so folgern wir hieraus, daß

$$(1.5) \qquad 0 < A - 3\varepsilon < |a_\nu|, |b_\nu|, |c_\nu|, |e_\nu| < A + \varepsilon, \qquad \nu \geqq N(\varepsilon)$$

ist; denn zunächst ist

$$|a_\nu|, |b_\nu|, |c_\nu|, |e_\nu| \leqq A_\nu \leqq A_{N(\varepsilon)} < A + \varepsilon,$$

und wäre einer der vier Absolutbeträge kleiner als $A - 3\varepsilon$, so wäre

$$|a_{\nu+1}| < \tfrac{1}{4}(3A + 3\varepsilon + A - 3\varepsilon) = A,$$

$$|b_{\nu+1}|, |c_{\nu+1}|, |e_{\nu+1}| < \tfrac{1}{2}\{A + \varepsilon + \sqrt{(A+\varepsilon)(A-3\varepsilon)}\} < A,$$

also

$$A_{\nu+1} < A,$$

was der Definition von A widerspricht. Die Zahlen $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ $(\nu \geqq N(\varepsilon))$ liegen also in dem Kreisring zwischen den Kreisen mit den Radien $A - 3\varepsilon$ und $A + \varepsilon$ um den Nullpunkt; insbesondere gilt dies auch von den Zahlen $a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \ldots$ und daraus können wir sofort eine Beschränkung für die Argumente erschließen. Denn offenbar wird die

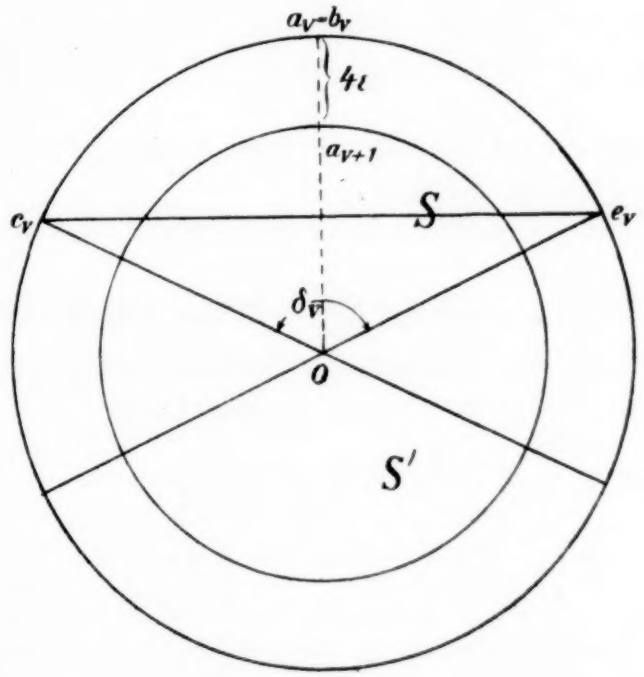

Fig. 2.

maximale Argumentdifferenz δ_ν eines Quadrupels $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ bei der symmetrischen Anordnung der Figur 2 erreicht, in der $a_\nu = b_\nu$ auf dem äußeren Kreise, $a_{\nu+1}$ auf dem inneren Kreise und c_ν, e_ν entsprechend auf dem äußeren Kreise liegen. Da die Breite des Kreisringes 4ε ist, wird

$$\cos\frac{\delta_\nu}{2}=\frac{A-7\varepsilon}{A+\varepsilon},\qquad \sin\frac{\delta_\nu}{2}=\frac{4\sqrt{\varepsilon(A-3\varepsilon)}}{A+\varepsilon},$$

d. h. δ_ν strebt mit ε gleichzeitig gegen Null.

Es liegen somit alle Quadrupel, deren Index $\nu \geqq N(\varepsilon)$ ist, im genannten Kreisring der Breite 4ε, und außerdem jedes einzelne Quadrupel in einem Sektor des Ringes von der Öffnung δ_ν. Dies ist aber bei hinreichend kleinem ε nur möglich, wenn der Übergang vom ν-ten zum $(\nu+1)$-ten Quadrupel gemäß der Bedingung (1. 4) erfolgt. Denn die sechs Wurzeln $\sqrt{a_\nu b_\nu}, \sqrt{a_\nu c_\nu}, \ldots, \sqrt{c_\nu e_\nu}$ liegen entweder im gleichen Sektor S wie die $a_\nu, b_\nu, c_\nu, e_\nu$ oder in dem am Nullpunkt gespiegelten Sektor S'; im ersteren Falle sind sie nach (1. 4) bestimmt. $a_{\nu+1}$ liegt jedenfalls in S. Betrachten wir irgendein Paar dieser Wurzeln, z. B. $\sqrt{a_\nu b_\nu}$ und $\sqrt{c_\nu e_\nu}$, so sind drei Fälle möglich:

1. beide liegen in S, dann gilt dasselbe von $b_{\nu+1}$;
2. beide liegen in S', dann ist

$$|\arg a_{\nu+1}-\arg b_{\nu+1}| \geqq \pi-\delta_\nu,$$

also lägen für $\delta_\nu < \frac{\pi}{2}$ die Größen $a_{\nu+1}, b_{\nu+1}$ nicht mehr in einem Sektor der Breite δ_ν;

3. eine dieser Wurzeln liegt in S, die andere in S', dann ist aber

$$|b_{\nu+1}| \leqq (A+\varepsilon)\sin\frac{\delta_\nu}{2}=4\sqrt{\varepsilon(A-3\varepsilon)},$$

und $b_{\nu+1}$ kann nicht mehr in den vorgeschriebenen Kreisring fallen, wenn

$$4\sqrt{\varepsilon(A-3\varepsilon)} < A-3\varepsilon; \qquad \varepsilon < \frac{A}{19}$$

ist. Es ist mithin nur der erste Fall möglich, und da man ebenso bezüglich der beiden andern Wurzelpaare schließen kann, so folgt, daß für genügend kleines ε, d. h. von einer gewissen Stelle $N(\varepsilon)$ ab, der Algorithmus des einfachsten Mittels gelten, also der Algorithmus regulär sein muß, wenn anders er einem von Null verschiedenen Grenzwert zustreben soll.

Damit ist der allgemeine Konvergenzbeweis für $\mathfrak{M}(a, b, c, e)$ erledigt. Wir fügen einige Bemerkungen über diese Funktion an:

1. $\mathfrak{M}(a, b, c, e)$ ist eine homogene Funktion ersten Grades in ihren vier Argumenten, d. h. es ist

$$\mathfrak{M}(ka, kb, kc, ke) = k\mathfrak{M}(a, b, c, e).$$

Es kommt uns daher nur auf das Studium der Funktion $\mathfrak{M}(1, x, y, z)$ der drei komplexen Variablen x, y, z an. Sie genügt der Funktionalgleichung

$$\text{(1. 6)}\qquad \mathfrak{M}(1,x,y,z)=\frac{1+x+y+z}{4}\times \mathfrak{M}\left(1,\frac{2(\sqrt{x}+\sqrt{yz})}{1+x+y+z},\frac{2(\sqrt{y}+\sqrt{xz})}{1+x+y+z},\frac{2(\sqrt{z}+\sqrt{xy})}{1+x+y+z}\right)$$

mit entsprechend dem Funktionszweig zu wählenden Wurzelvorzeichen.

2. $M(a, b, c, e)$ ist symmetrisch in seinen vier Argumenten; das gleiche gilt von $\mathfrak{M}(a, b, c, e)$, wenn man die Gesamtheit der Funktionszweige ins Auge faßt.

3. Im *Borchardt*schen Algorithmus ist der des gewöhnlichen arithmetisch-geometrischen Mittels enthalten, denn setzt man $a = b$, $c = e$, so wird

$$a_1 = b_1 = \tfrac{1}{2}(a+c), \qquad c_1 = e_1 = \sqrt{ac}; \quad \text{etc.}$$
$$M(a, b, c, e) = M(a, c),$$

wenn $M(a, c)$ das einfachste arithmetisch-geometrische Mittel aus a und c bedeutet [4]). Alle Zweige von $\mathfrak{M}(a, c)$ sind durch die angegebene Spezialisierung aus denen von $\mathfrak{M}(a, b, c, e)$ ableitbar.

4. Sind zwei Argumente gleich Null, z. B. $c = e = 0$, so wird

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(a + b), \quad b_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}, \quad c_1 = e_1 = 0, \quad \text{etc.}$$

also

$$\mathfrak{M}(a, b, 0, 0) = 0.$$

Verschwindet jedoch nur ein Argument, z. B. $e = 0$, so ist

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(a + b + c), \quad b_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{ab}, \quad c_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{ac}, \quad e_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{bc}, \quad \text{etc.}$$

also ist dann $M(a, b, c, e)$ im allgemeinen von Null verschieden.

5. $M(a, b, c, e)$ kann auch mehrdeutig sein, wenn zwei oder mehrere Größen eines Quadrupels die Argumentdifferenz π haben, weil dann die Bestimmung (1. 4) jedesmal zweideutig ist. Ist der Grenzwert von Null verschieden, so kann nach dem geführten Konvergenzbeweise dieser Fall nur endlich oft auftreten. Sein Vorkommen ist jedenfalls so lange ausgeschlossen, als die vier Ausgangselemente innerhalb einer Halbebene liegen, die von einer durch 0 gehenden Geraden begrenzt wird.

6. Wie das einfachste arithmetisch-geometrische Mittel nur dann verschwinden kann, wenn beide Argumente entgegengesetzt gleich sind, ist das *Borchardt*sche einfachste Mittel gleich Null, wenn die Elemente a, b, c, e symmetrisch auf einem Kreise um 0 liegen.

7. Für reell-positive Ausgangselemente sind beim Normalalgorithmus alle Wurzeln mit positivem Zeichen zu nehmen; dann ist $M(a, b, c, e)$ das absolut größte aller möglichen Mittel.

§ 2. Hilfsalgorithmen.

Schon *Borchardt* erkannte aus algebraischen Motiven die Notwendigkeit der Einführung von Hilfsalgorithmen, die dem Algorithmus (1. 2) an die Seite zu stellen sind. Und zwar setzen wir [5]):

$$\text{(2. 1)} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{a}_\nu &= a_\nu + b_\nu + c_\nu + e_\nu, & \mathfrak{b}_\nu &= a_\nu + b_\nu - c_\nu - e_\nu, \\ \mathfrak{c}_\nu &= a_\nu - b_\nu + c_\nu - e_\nu, & \mathfrak{e}_\nu &= a_\nu - b_\nu - c_\nu + e_\nu, \end{aligned}$$

so daß

$$\text{(2. 2)} \qquad \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{a}_\nu = 4\mathfrak{M}(a, b, c, e), \quad \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{b}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{c}_\nu = \lim_{\nu\to\infty} \mathfrak{e}_\nu = 0$$

ist. Sodann bezeichnen wir

$$\text{(2. 3)} \qquad \begin{aligned} b'_{\nu+1} &= \tfrac{1}{4}(a_\nu + b_\nu - c_\nu - e_\nu) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{b}_\nu, \\ c'_{\nu+1} &= \tfrac{1}{4}(a_\nu - b_\nu + c_\nu - e_\nu) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{c}_\nu, \\ e'_{\nu+1} &= \tfrac{1}{4}(a_\nu - b_\nu - c_\nu + e_\nu) = \tfrac{1}{4}\mathfrak{e}_\nu, \end{aligned}$$

und

$$\text{(2. 4)} \qquad b''_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_\nu b_\nu} - \sqrt{c_\nu e_\nu}), \quad c''_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_\nu c_\nu} - \sqrt{b_\nu e_\nu}), \quad e''_{\nu+1} = \tfrac{1}{2}(\sqrt{a_\nu e_\nu} - \sqrt{b_\nu c_\nu}).$$

Den Gleichungen (2. 3), (2. 4) können wir auch die symmetrische Form geben

$$\text{(2. 5)} \qquad \begin{aligned} b'_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu} + \sqrt{\mathfrak{c}_\nu \mathfrak{e}_\nu}), & b''_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{b}_\nu} - \sqrt{\mathfrak{c}_\nu \mathfrak{e}_\nu}), \\ c'_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{c}_\nu} + \sqrt{\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{e}_\nu}), & c''_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{c}_\nu} - \sqrt{\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{e}_\nu}), \\ e'_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{e}_\nu} + \sqrt{\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_\nu}), & e''_\nu &= \tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu \mathfrak{e}_\nu} - \sqrt{\mathfrak{b}_\nu \mathfrak{c}_\nu}). \end{aligned}$$

---

[5]) Vgl. G, S. 137.

[4]) Vgl. A, S. 40—47.

Für den Normalalgorithmus sind hierbei die Wurzeln entsprechend zu bestimmen wie in (1. 4). Im Falle des Normalalgorithmus bei reell-positiven Argumenten hat *Borchardt* bewiesen, daß

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{b_\nu''}{b_\nu'}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{c_\nu''}{c_\nu'}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{e_\nu''}{e_\nu'}=1 \tag{2. 6}$$

ist [6]). Durch Einführung dieser Hilfsalgorithmen wird die Umkehrung des ursprünglichen Algorithmus ermöglicht und zwar ist

$$\begin{aligned}&\sqrt{a_{\nu-1}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{b}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{c}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{e}_\nu}),\quad \sqrt{b_{\nu-1}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{b}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{c}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{e}_\nu}),\\ &\sqrt{c_{\nu-1}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{b}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{c}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{e}_\nu}),\quad \sqrt{e_{\nu-1}}=\tfrac{1}{2}(\sqrt{\mathfrak{a}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{b}_\nu}-\sqrt{\mathfrak{c}_\nu}+\sqrt{\mathfrak{e}_\nu}).\end{aligned} \tag{2. 7}$$

Für das gewöhnliche arithmetisch-geometrische Mittel, bei dem $a=b$, $c=e$ ist, reduzieren sich diese Hilfsgrößen auf

$$\begin{aligned}&\mathfrak{a}_\nu=2(a_\nu+c_\nu),\quad \mathfrak{b}_\nu=2(a_\nu-c_\nu),\quad \mathfrak{c}_\nu=\mathfrak{e}_\nu=0;\\ &b_\nu'=\sqrt{a_\nu^2-c_\nu^2},\quad c_\nu'=e_\nu'=0;\\ &b_\nu''=\sqrt{a_\nu^2-c_\nu^2},\quad c_\nu''=e_\nu''=0.\end{aligned}$$

§ 3. Die Nullwerte der Thetafunktionen.

Wir werden im folgenden den *Borchardt*schen Algorithmus uniformisieren, d. h. von seiner Mehrdeutigkeit befreien. Dies wird uns gelingen durch Verwendung der *Rosenhain*schen Thetafunktionen des Falles $p=2$, von denen wir jedoch nur die Nullwerte ($u=0$, $v=0$) brauchen. Die Bezeichnung wählen wir gemäß der Charakteristikentheorie [7]), die drei auftretenden Moduln seien τ_{11}, τ_{12}, τ_{22}. Wir setzen

$$e^{\pi i\tau_{11}}=x,\quad e^{\pi i\tau_{12}}=y,\quad e^{\pi i\tau_{22}}=z, \tag{3. 1}$$

und

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}h & j\\ k & l\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}h & j\\ k & l\end{bmatrix}(\tau_{11},\tau_{12},\tau_{22})\\ &=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}e^{\pi i\left\{\left(m+\frac{h}{2}\right)^2\tau_{11}+2\left(m+\frac{h}{2}\right)\left(n+\frac{j}{2}\right)\tau_{12}+\left(n+\frac{j}{2}\right)^2\tau_{22}+\left(m+\frac{h}{2}\right)k+\left(n+\frac{j}{2}\right)l\right\}},\\ \begin{bmatrix}h & j\\ k & l\end{bmatrix}&=\sum_{m,n=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\left(m+\frac{h}{2}\right)k+\left(n+\frac{j}{2}\right)l}x^{\left(m+\frac{h}{2}\right)^2}y^{2\left(m+\frac{h}{2}\right)\left(n+\frac{j}{2}\right)}z^{\left(n+\frac{j}{2}\right)^2}.\end{aligned} \tag{3. 2}$$

Um das folgende verständlicher zu gestalten, schreiben wir die in dieser Formel enthaltenen zehn Thetafunktionen explizit hin, indem wir je zwei zusammenfassen:

$$\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}=\begin{aligned}&1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\cdots\\ &\pm 2z[1+x(y^2+y^{-2})+x^4(y^4+y^{-4})+x^9(y^6+y^{-6})+x^{16}(y^8+y^{-8})+\cdots]\\ &+2z^4[1+x(y^4+y^{-4})+x^4(y^8+y^{-8})+x^9(y^{12}+y^{-12})+x^{16}(y^{16}+y^{-16})+\cdots]\\ &\pm 2z^9[1+x(y^6+y^{-6})+x^4(y^{12}+y^{-12})+x^9(y^{18}+y^{-18})+x^{16}(y^{24}+y^{-24})+\cdots]\\ &+\cdots,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\end{matrix}\right\}=\begin{aligned}&1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\cdots\\ &\pm 2z[1-x(y^2+y^{-2})+x^4(y^4+y^{-4})-x^9(y^6+y^{-6})+x^{16}(y^8+y^{-8})-\cdots]\\ &+2z^4[1-x(y^4+y^{-4})+x^4(y^8+y^{-8})-x^9(y^{12}+y^{-12})+x^{16}(y^{16}+y^{-16})-\cdots]\\ &\pm 2z^9[1-x(y^6+y^{-6})+x^4(y^{12}+y^{-12})-x^9(y^{18}+y^{-18})+x^{16}(y^{24}+y^{-24})-\cdots]\\ &+\cdots,\end{aligned}$$

---

[6]) Vgl. A, S. 45 f.

[7]) Vgl. *A. Krazer*, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig, 1903, S. 29 ff.

$$\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\end{matrix}\right\} = \begin{aligned}&2x^{\frac{1}{4}}[1 \pm z(y+y^{-1}) + z^4(y^2+y^{-2}) \pm z^9(y^3+y^{-3}) + z^{16}(y^4+y^{-4}) \pm \cdots]\\ &+ 2x^{\frac{9}{4}}[1 \pm z(y^3+y^{-3}) + z^4(y^6+y^{-6}) \pm z^9(y^9+y^{-9}) + z^{16}(y^{12}+y^{-12}) \pm \cdots]\\ &+ 2x^{\frac{25}{4}}[1 \pm z(y^5+y^{-5}) + z^4(y^{10}+y^{-10}) \pm z^9(y^{15}+y^{-15}) + z^{16}(y^{20}+y^{-20}) \pm \cdots]\\ &+ \cdots,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\end{matrix}\right\} = \begin{aligned}&2z^{\frac{1}{4}}[1 \pm x(y+y^{-1}) + x^4(y^2+y^{-2}) \pm x^9(y^3+y^{-3}) + x^{16}(y^4+y^{-4}) \pm \cdots]\\ &+ 2z^{\frac{9}{4}}[1 \pm x(y^3+y^{-3}) + x^4(y^6+y^{-6}) \pm x^9(y^9+y^{-9}) + x^{16}(y^{12}+y^{-12}) \pm \cdots]\\ &+ 2z^{\frac{25}{4}}[1 \pm x(y^5+y^{-5}) + x^4(y^{10}+y^{-10}) \pm x^9(y^{15}+y^{-15}) + x^{16}(y^{20}+y^{-20}) \pm \cdots]\\ &+ \cdots,\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\end{matrix}\right\} = \begin{aligned}&2z^{\frac{1}{4}}[\pm x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}} \pm y^{-\frac{1}{2}}) + x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}} \pm y^{-\frac{3}{2}}) \pm x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}} \pm y^{-\frac{5}{2}}) + \cdots]\\ &\pm 2z^{\frac{9}{4}}[\pm x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{3}{2}} \pm y^{-\frac{3}{2}}) + x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{9}{2}} \pm y^{-\frac{9}{2}}) \pm x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{15}{2}} \pm y^{-\frac{15}{2}}) + \cdots]\\ &+ 2z^{\frac{25}{4}}[\pm x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{5}{2}} \pm y^{-\frac{5}{2}}) + x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{15}{2}} \pm y^{-\frac{15}{2}}) \pm x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{25}{2}} \pm y^{-\frac{25}{2}}) + \cdots]\\ &\pm \cdots\end{aligned}$$

Durch Vertauschung von x und z geht die Gesamtheit dieser Thetas wieder in sich selbst über. Die Thetareihen haben nur dann einen Sinn, wenn die notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung erfüllt ist, die besagt, daß

$$\Im(\tau_{11})\,\xi_1^2 + 2\,\Im(\tau_{12})\,\xi_1\,\xi_2 + \Im(\tau_{22})\,\xi_2^2$$

eine positiv definite quadratische Form in den Variablen ξ_1, ξ_2 sein muß [8]), d. h. daß

$$(3.4)\qquad \Im(\tau_{11}) = -\frac{1}{\pi}\log|x| > 0, \quad \Im(\tau_{22}) = -\frac{1}{\pi}\log|z| > 0,$$

$$\Im(\tau_{12})^2 < \Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}),$$

oder

$$|x| < 1, \quad |z| < 1, \quad (\log|y|)^2 < \log|x|\log|z|$$

ist.

Diese Bedingung läßt sich auch in der Form aussprechen, daß das allgemeine Glied der obigen Thetareihen bei wachsendem Index gegen Null streben soll, d. h. daß

$$x^{m^2} z^{n^2} y^{\pm 2mn} \to 0$$

mit $m \to \infty$ oder $n \to \infty$. Durch (3. 4) werden die Variablen τ_{11}, τ_{22} auf die obere Halbebene, τ_{12} auf das Innere eines um die reelle Achse gelagerten Parallelstreifens der Breite $2\sqrt{\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22})}$ beschränkt.

Wir brauchen noch die von *Königsberger* angegebenen Formeln für die Transformation zweiten Grades [9]). Bezeichnet man zweckmäßig

$$\begin{bmatrix}h&j\\k&l\end{bmatrix}^{(n)} = \begin{bmatrix}h&j\\k&l\end{bmatrix}(2^n\tau_{11}, 2^n\tau_{12}, 2^n\tau_{22}),$$

so gelten folgende Beziehungen:

---

[8]) Vgl. *Krazer*, a. a. O. S. 17.

[9]) Vgl. Journal f. reine u. angew. Mathem. **64** (1865), S. 38; *Krazer*, a. a. O. S. 336 ff.

$$
\begin{aligned}
4\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2,\\
4\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2,\\
4\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2,\\
4\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2,\\
2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\\
2\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\\
2\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\\
2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\\
2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix},\\
2\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}^{(1)2} &= \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Für rein imaginäre τ_{ik} folgt aus diesen Formeln, daß alle Thetafunktionen $\begin{bmatrix}h&j\\k&l\end{bmatrix}^{(n)}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ reell positiv sind. Dann werden nämlich x, y, z reell positiv, und das Gleiche gilt von den Funktionen $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$. Aus (3. 5) folgt die Positivität von $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$, also die von $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$. Ferner erkennt man aus (3, 5), daß wenn

$$
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^{(n)} \tag{3.6}
$$

ist, dann auch die Ungleichung besteht

$$
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n-1)} > \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n-1)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{(n-1)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^{(n-1)} \tag{3.7}
$$

und umgekehrt, d. h. also daß die Größenfolge dieser vier Thetas bei der Verdoppelung der Moduln erhalten bleibt. Denn zunächst ergibt (3. 7) sofort (3. 6) und die parallelen Ungleichungen

$$
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}^{(n)}, \tag{3.8}
$$

$$
\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}^{(n)}. \tag{3.9}
$$

Umgekehrt zieht aber auch jede der Ungleichungen (3. 6), (3. 8), (3. 9) die Ungleichung (3. 7) nach sich. Für (3. 8) ist dies sofort evident, (3. 6) und (3. 9) dagegen formt sich um in

$$\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\} > 0,$$

$$\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\} > 0,$$

$$\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\left\{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}\right\} > 0,$$

was, da $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ die größte der vier Tetafunktionen ist, (3. 7) nach sich zieht.

§ 4. Die Uniformisierung des Algorithums.

Vergleicht man die Formeln (3. 5), die die drei Variablen x, y, z oder $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ enthalten, mit denen des *Borchardt*schen Algorithmus, in dem als Variable die drei Verhältnisse $\frac{b}{a}$, $\frac{c}{a}$, $\frac{e}{a}$ auftreten, so wird man dazu geführt, für einen beliebigen *Borchardt*schen Algorithmus, d. h. beliebige Ausgangselemente a, b, c, e den Ansatz zu machen

$$(4.\,1)\quad a = \mu\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2,\ b = \mu\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2,\ c = \mu\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2,\ e = \mu\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2,$$

und hierin μ, τ_{ik} als noch zu bestimmende Größen aufzufassen. Für einen bestimmten unter den unendlichvielen Algorithmen mit diesen Ausgangselementen gilt dann nämlich nach (3. 5)

$$(4.\,2)\quad a_n = \mu\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)2},\quad b_n = \mu\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n)2},\quad c_n = \mu\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{(n)2},\quad e_n = \mu\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^{(n)2},$$

und dieser Algorithmus ist durch die Thetafunktionen *uniformisiert* in dem Sinne, daß mit ihrer Hilfe jedes Glied des Algorithmus *unmittelbar und eindeutig* dargestellt werden kann. Diese Uniformisierung werden wir im folgenden untersuchen, sie stellt uns vor eine doppelte Aufgabe:

1. Zu vorgelegten a, b, c, e die uniformisierenden Variablen μ, τ_{ik} *irgendeines* Algorithmus zu bestimmen.

2. Zu vorgelegten a, b, c, e die uniformisierenden Variablen *aller möglichen* (regulären) Algorithmen zu bestimmen, d. h. die Transformationen der τ_{ik} zu entwickeln, die dem Übergang von einem Algorithmus zu einem andern mit denselben Anfangselementen entsprechen.

Wir werden uns in dieser Arbeit nur mit der ersten Aufgabe befassen und sie unter gewissen Voraussetzungen, die z. B. beim Normalalgorithmus reell-positiver Ausgangselemente erfüllt sind, vollständig lösen.

Zunächst folgt aus (4. 1), (4. 2) einerseits, (2. 1), (2. 5), (3. 5) andererseits

$$(4.\,3)\quad \begin{aligned} b'_n &= \mu\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)2},\quad c'_n = \mu\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}^{(n)2},\quad e'_n = \mu\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}^{(n)2},\\ b''_n &= \mu\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n)2},\quad c''_n = \mu\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^{(n)2},\quad e''_n = \mu\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}^{(n)2}. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der vier Thetafunktionen im Ansatz (4. 1) ist wegen der Symmetrie des Algorithmus in den vier Elementen beliebig; natürlich entspricht jeder Permutation der vier Thetas eine andere Bestimmung (und zwar eine lineare Substitution) der τ_{ik}. Wir geben aus später erhellenden Gründen dem Ansatz (4. 1) den Vorzug.

Zufolge der Konvergenzbedingung (3. 4) streben die Funktionen $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$,

$\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$ bei fortgesetzter Verdoppelung der Moduln gegen 1, und man erhält daher aus (4. 2)

$$\mu = \mathfrak{M}(a, b, c, e), \tag{4. 4}$$

wo $\mathfrak{M}$ der Grenzwert eben desjenigen *Borchardt*schen Algorithmus ist, der durch (4. 2) uniformisiert ist. Man erkennt hieraus gleichzeitig, daß *die Thetafunktionen nur die regulären Algorithmen uniformisieren können* [10]), da für die irregulären ja $\mathfrak{M}(a, b, c, e) = 0$ ist. Es ist demnach nur noch die Bestimmung der τ_{ik} zu leisten.

Schließlich bemerken wir, daß im Falle rein imaginärer τ_{ik}, also positiv reeller a, b, c, e der Algorithmus (4. 2) der Normalalgorithmus ist; denn, wie oben bemerkt, sind dann die Funktionen $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, reell positiv, d. h. die Bedingungen (1. 4) des Normalalgorithmus erfüllt.

§ 5. Reduktionsbedingungen.

Die noch ausstehende Ermittlung der τ_{ik} bei vorgelegten a, b, c, e werden wir im folgenden leisten und speziell den Fall reell positiver Elemente $a > b > c > e$ besonders behandeln; die τ_{ik} werden sich als Grenzwerte eines aus Quadratwurzeln zusammengesetzten algebraischen Algorithmus ergeben. Der Grundgedanke ist hierbei der, durch sukzessive Verdoppelung der Moduln die Thetas im wesentlichen auf ihr erstes Glied zu reduzieren; es ist dies jedoch nicht immer möglich, sondern nur unter Voraussetzung gewisser Ungleichungen, die wir als Reduktionsbedingungen bezeichnen und nunmehr ableiten.

Betrachten wir zunächst die beiden Funktionen $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$; man vermutet, daß sie sich bei sukzessiver Verdoppelung der Moduln auf ihr erstes Glied $2x^{\frac{1}{4}}$ reduzieren werden. Klammert man dieses aus, so müssen in der Klammer außer der 1 nur Glieder vorkommen, die bei wachsenden Moduln verschwinden. In der ersten Zeile sind dies Terme der Form

$$z^{n^2} y^{\pm n} = e^{\pi i n(\pm \tau_{12} + n\tau_{22})}, \qquad (n \geqq 1),$$

und diese haben dann und nur dann die verlangte Eigenschaft, wenn

$$n\,\Im(\tau_{22}) \pm \Im(\tau_{12}) > 0, \qquad (n \geqq 1),$$
$$|\Im(\tau_{12})| < \Im(\tau_{22})$$

ist. In den andern Zeilen bleibt als allgemeines Glied stehen

$$x^{n^2+n} y^{\pm m(2n+1)} z^{m^2}, \qquad (m \geqq 0, n \geqq 1),$$

und dieses verschwindet bei wachsenden Moduln dann und nur dann, wenn

$$n(n+1)\,\Im(\tau_{11}) \pm m(2n+1)\,\Im(\tau_{12}) + m^2\,\Im(\tau_{22}) > 0, \qquad (n \geqq 1),$$

$$\{(n+\tfrac{1}{2})\,\Im(\tau_{12}) \pm m\,\Im(\tau_{22})\}^2 + \{n(n+1)\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}) - (n^2+n+\tfrac{1}{4})\,\Im(\tau_{12})^2\} > 0,$$

also

$$\Im(\tau_{12})^2 < \{1 - \frac{1}{4n(n+1)+1}\}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}), \qquad (n \geqq 1)$$

---

[10]) In gleicher Weise können die elliptischen Thetafunktionen nur die regulären Algorithmen des arithmetisch-geometrischen Mittels uniformisieren, vgl. *H. Geppert*, Math. Ann. **99** (1928), S. 176.

$$\Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22})$$

ist. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß sich $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{(n)}$ und $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}^{(n)}$ mit $n\to\infty$ auf ihr erstes Glied $2x^{2^{n-2}}$ reduzieren, lauten somit

$$(5.\,1)\qquad |\Im(\tau_{12})| < \Im(\tau_{22}),\ \Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}).$$

Die entsprechende Bedingung dafür, daß $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}^{(n)}$ und $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{(n)}$ mit $n\to\infty$ das erste Glied $2z^{2^{n-2}}$ ergeben, lauten daher:

$$(5.\,2)\qquad |\Im(\tau_{12})| < \Im(\tau_{11}),\ \Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}).$$

Ferner untersuchen wir die Funktionen $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, bei denen wir bzw. $\pm 2x^{\frac{1}{4}}z^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}\pm y^{-\frac{1}{2}})$ vor die Klammer setzen; in der ersten Zeile bleiben dann außer der Eins Glieder der Form $x^{n(n+1)}y^{\pm m}$, $(0\leqq m\leqq n,\ n\geqq 1)$ stehen, und diese streben dann und nur dann mit wachsendem Modul gegen Null, wenn das gleiche von

$$x^{n(n+1)}y^{\pm n} = e^{n i n\{(n+1)\Im(\tau_{11})\,\pm\,\Im(\tau_{12})\}},\qquad (n\geqq 1)$$

gilt, d. h. wenn

$$(n+1)\,\Im(\tau_{11}) \pm \Im(\tau_{12}) > 0,\qquad (n\geqq 1)$$

$$|\Im(\tau_{12})| < 2\,\Im(\tau_{11})$$

ist. In gleicher Weise hätten wir auch die erste Spalte der genannten Funktionen betrachten können und die Ungleichung gefunden

$$|\Im(\tau_{12})| < 2\,\Im(\tau_{22}).$$

Es bleiben noch die übrigen Glieder der 2., 3., 4., ... Zeile bzw. Spalte zu untersuchen, deren ausschlaggebender Teil lautet

$$x^{n(n+1)}y^{\pm(2mn+m+n)}z^{m(m+1)},\qquad (m,\,n\geqq 1);$$

dieser ergibt die Bedingung

$$n(n+1)\,\Im(\tau_{11}) \pm (2mn+m+n)\,\Im(\tau_{12}) + m(m+1)\,\Im(\tau_{22}) > 0,$$

$$\Im(\tau_{12})^2 < \frac{4mn(m+1)(n+1)}{(2mn+m+n)^2}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}) = \left\{1-\left(\frac{m-n}{2mn+m+n}\right)^2\right\}\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}),$$

und da der Maximalwert von

$$\left|\frac{m-n}{2mn+m+n}\right|$$

für $m, n\geqq 1$ gleich $\frac{1}{3}$ ist, folgt

$$\Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}).$$

Zusammenfassend lauten die Reduktionsbedingungen für $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$:

$$(5.\,3)\quad |\Im(\tau_{12})| < 2\,\Im(\tau_{11}),\ |\Im(\tau_{12})| < 2\,\Im(\tau_{22}),\ \Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}).$$

Offenbar ist (5. 3) in (5. 1) und (5. 2) enthalten. Die Symmetrie des Algorithmus und der Gesamtheit der Thetafunktionen in x, z erlaubt uns, die letzten Bedingungen zusammenzufassen. Wir bemerken nämlich, daß zufolge (3. 3) bei einer Vertauschung von x und z die Funktionen $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ invariant bleiben und die übrigen sich paarweise vertauschen, nämlich $\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ mit $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, d. h. zufolge (4. 1), (4. 2) ist eine Vertauschung von x und z gleichwertig einer Vertauschung sämtlicher Größen b_n, c_n; b_n', c_n'; b_n'', c_n''. Es ist daher gleichgültig, welcher der beiden Variablen x und z wir den größeren Absolutbetrag zusprechen; wir nehmen im folgenden an, es sei

$$|x| \geqq |z|, \quad \text{oder} \quad \vartheta(\tau_{11}) \leqq \vartheta(\tau_{22}) \tag{5. 4}$$

Dann fassen sich (5. 1) — (5. 3) zusammen in

$$|\vartheta(\tau_{12})| < \vartheta(\tau_{11}) \leqq \vartheta(\tau_{22}); \quad \vartheta(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\vartheta(\tau_{11})\vartheta(\tau_{22}). \tag{5. 5}$$

Es bleiben uns nunmehr noch die vier ersten Thetafunktionen zu untersuchen, sie nähern sich bei sukzessiver Verdoppelung der Moduln dem Werte 1; für uns ist jedoch die genauere Kenntnis der Art dieser Annäherung von Wichtigkeit. Wir können aus den genannten Funktionen die Glieder $1 \pm 2x \pm 2z$ bzw. herausnehmen und nach den Bedingungen fragen, wann diese Glieder *allein* ausschlaggebend werden, d. h. wann die mit ihnen multiplizierten Klammern mit wachsendem Modul sich auf 1 reduzieren. Da x und z symmetrisch auftreten, entspricht jeder Bedingung für $\vartheta(\tau_{11})$ eine solche für $\vartheta(\tau_{22})$. Nehmen wir aus der 2., 3., . . Zeile der genannten Funktionen den Faktor $2z$ heraus, so bleiben noch zwei Arten von Gliedern zu untersuchen:

$$x^{n^2} y^{\pm 2n} \quad \text{und} \quad x^{n^2} y^{\pm 2mn} z^{m^2-1}, \qquad (m \geqq 2,\ n \geqq 1)$$

die bei wachsenden Moduln gegen Null streben, wenn

$$n\vartheta(\tau_{11}) \pm 2\vartheta(\tau_{12}) > 0, \qquad (n \geqq 1),$$

$$|\vartheta(\tau_{12})| < \frac{1}{2}\vartheta(\tau_{11});$$

$$n^2\vartheta(\tau_{11}) \pm 2mn\vartheta(\tau_{12}) + (m^2-1)\vartheta(\tau_{22}) > 0, \qquad (n \geqq 1,\ m \geqq 2),$$

$$\vartheta(\tau_{12})^2 < \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)\vartheta(\tau_{11})\vartheta(\tau_{22}),$$

$$\vartheta(\tau_{12})^2 < \frac{3}{4}\vartheta(\tau_{11})\vartheta(\tau_{22})$$

ist. Unter der Annahme (5. 4) lauten somit die Reduktionsbedingungen für diese vier Funktionen

$$|\vartheta(\tau_{12})| < \frac{1}{2}\vartheta(\tau_{11}) < \frac{1}{2}\vartheta(\tau_{22}), \tag{5. 6}$$

$$\vartheta(\tau_{12})^2 < \frac{3}{4}\vartheta(\tau_{11})\vartheta(\tau_{22}),$$

deren letztere auch weggelassen werden kann, da vermöge der ersten schon

$$\vartheta(\tau_{12})^2 < \frac{1}{4}\vartheta(\tau_{11})\vartheta(\tau_{22})$$

folgt. (5. 6) umfaßt (5. 4) und (5. 5) und stellt also die engste Form sämtlicher Reduktionsbedingungen dar.

§ 6. Bestimmung der τ_{ik}.

Nehmen wir an, die gesuchten Variablen τ_{ik} erfüllen die Ungleichungen (5. 5), so ist ihre Bestimmung sofort zu leisten, dann ist nämlich nach (4. 3) [11])

$$\begin{aligned} &b_n' \sim \mu(2x^{2^{n-2}})^2 = 4\mu x^{2^{n-1}}, \quad b_n'' \sim 4\mu x^{2^{n-1}}, \\ &c_n' \sim \mu(2z^{2^{n-2}})^2 = 4\mu z^{2^{n-1}}, \quad c_n'' \sim 4\mu z^{2^{n-1}}, \\ &e_n' \sim 4\mu x^{2^{n-1}} z^{2^{n-1}} (y^{2^{n-1}} + y^{-2^{n-1}})^2, \\ &e_n'' \sim 4\mu x^{2^{n-1}} z^{2^{n-1}} (-y^{2^{n-1}} + y^{-2^{n-1}})^2, \end{aligned} \tag{6. 1}$$

und demnach wird

$$x = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{b_n'}{4\mu}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{b_n''}{4\mu}}; \tag{6. 2}$$

$$z = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{c_n'}{4\mu}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{c_n''}{4\mu}}; \tag{6. 3}$$

$$\begin{aligned} 4x^{2^{n-2}} z^{2^{n-2}} y^{2^{n-1}} &\sim \frac{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}{\sqrt{\mu}}, \\ 4x^{2^{n-2}} z^{2^{n-2}} y^{-2^{n-1}} &\sim \frac{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}{\sqrt{\mu}}, \end{aligned} \tag{6. 4}$$

also nach dem Vorangehenden

$$y^{2^{n-1}} \sim \sqrt{\mu}\frac{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}{\sqrt{b_n' c_n'}}, \qquad y^{-2^{n-1}} \sim \sqrt{\mu}\frac{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}{\sqrt{b_n' c_n'}},$$

somit

$$y = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{\sqrt{\mu}(\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''})}{\sqrt{b_n' c_n'}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n-1}]{\frac{\sqrt{b_n' c_n'}}{\sqrt{\mu}(\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''})}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^{n}]{\frac{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}}. \tag{6. 5}$$

Die Formeln (6. 2), (6. 3), (6. 5) geben die gesuchten uniformisierenden Variablen [12]), wenn folgende drei Punkte bewiesen sind:

a) die auftretenden Grenzwerte existieren;

b) die sechs Bestimmungsgleichungen sind miteinander verträglich, d. h. es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n'}{b_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n'}{c_n''} = 1, \tag{6. 6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n' c_n'}{e_n' - e_n''} = \mu; \tag{6. 7}$$

c) Die gefundenen Werte erfüllen die Ungleichungen (5. 5), d. h.

$$|x| > |z| \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n'}{c_n'} > 1,$$

$$|y^{\pm 1}| > |x| \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} b_{n+1}' \left|\frac{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}\right|^{\pm 1} < 4\mu,$$

und schließlich

---

[11]) Das asymptotische Gleichheitszeichen $\sim$ bedeutet, daß der Grenzwert des Verhältnisses von linker und rechter Seite gleich 1 ist.

[12]) Diese Formeln entsprechen denen, durch die *Gauß* die uniformisierende Variable beim arithmetisch-geometrischen Mittel bestimmt, vgl. G, S. 104—106.

$$\Im(\tau_{12})^2 < \frac{8}{9}\,\Im(\tau_{11})\,\Im(\tau_{22}),$$

eine Ungleichung, die man ebenfalls direkt in den Variablen a, b, c, e ausdrücken kann; es ist nämlich einerseits

$$\log u = \lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{u} - 1),$$

andererseits

$$\Im(\tau_{11}) = -\frac{1}{\pi}\log|x|, \quad \Im(\tau_{12}) = -\frac{1}{\pi}\log|y|, \quad \Im(\tau_{22}) = -\frac{1}{\pi}\log|z|,$$

d. h.

$$\Im(\tau_{11}) = -\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{b_n'}{4\mu}\right|} - 1\right),$$

$$\Im(\tau_{12}) = -\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} 2^{n}\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}\right|} - 1\right),$$

$$\Im(\tau_{22}) = -\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty} 2^{n+1}\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{c_n'}{4\mu}\right|} - 1\right),$$

somit die letzte Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''}}{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}\right|} - 1\right)^2}{\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{b_n'}{4\mu}\right|} - 1\right)\left(\sqrt[4^n]{\left|\frac{c_n'}{4\mu}\right|} - 1\right)} < \frac{32}{9}.$$

Wir werden unten sehen, daß die Forderungen a) — c) im Falle reell-positiver Ausgangselemente erfüllt sind.

Nehmen wir an, die gesuchten τ_{ik} erfüllten nicht nur die Bedingung (5. 5), sondern die viel engere Forderung (5. 6), so ist

$$\begin{aligned} a_n &\sim \mu(1 + 2x^{2^n} + 2z^{2^n})^2, \quad & b_n &\sim \mu(1 + 2x^{2^n} - 2z^{2^n})^2, \\ c_n &\sim \mu(1 - 2x^{2^n} + 2z^{2^n})^2, \quad & e_n &\sim \mu(1 - 2x^{2^n} - 2z^{2^n})^2, \end{aligned} \tag{6. 8}$$

und daher erhalten wir für x und z je zwei neue Bestimmungen

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{c_n}}{4\sqrt{\mu}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{b_n} - \sqrt{e_n}}{4\sqrt{\mu}}}, \\ z &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{4\sqrt{\mu}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{c_n} - \sqrt{e_n}}{4\sqrt{\mu}}}. \end{aligned} \tag{6. 9}$$

Damit diese Grenzwerte existieren, ist notwendig und hinreichend, daß (6. 9) mit (6. 2), (6. 3) verträglich sei, d. h. daß

d) (6. 10) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{c_n}}{\sqrt{b_n} - \sqrt{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}}{\sqrt{c_n} - \sqrt{e_n}} = 1,$$

(6. 11) $$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}'}{\sqrt{a_n} - \sqrt{c_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}'}{\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}} = \sqrt{\mu},$$

und schließlich muß die Ausgangsbedingung (5. 6) erfüllt sein, dergemäß

$$|xy^{\pm 2}| < 1,$$

oder unter Benutzung der obigen Bestimmungen

c′) (6. 12) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{e_n'} - \sqrt{e_n''})^2}{c_n'} < 4$$

sein muß. c′) umfaßt natürlich c).

Durch die Formeln (6. 2) — (6. 5) und (6. 9) sind die uniformisierenden Variablen als Grenzwerte eines algebraischen, aus Quadratwurzeln zusammengesetzten Algorithmus bestimmt und durch sie die Uniformisierung des *Borchardt*schen Algorithmus geleistet.

7. Der Fall reell-positiver Elemente.

Wir gehen nun zu einer Anwendung der letzten Formeln über, nämlich zur Behandlung des Falles, daß die Ausgangselemente a, b, c, e reell positiv sind und es sich um den Normalalgorithmus handelt. Wir werden nachweisen, daß in diesem Falle die Forderungen *a*), b), c′), d) erfüllt und *somit durch* (6. 2) — (6. 5), (6. 9) *die uniformisierenden Variablen wirklich ermittelt sind.*

Vorab bemerken wir, daß alsdann alle auftretenden Größen $a_n, \ldots, e_n''$ reell positiv sind und somit x, y, z reell positiv, also die τ_{ik} rein imaginär werden, es ist dies also in gewissem Sinne der Normalfall [13]). Aus den Beziehungen (6. 8) folgt dann, daß asymptotisch

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^{(n)} > \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^{(n)}$$

ist, und der Bemerkung in § 4 zufolge ist also auch

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} > \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}.$$

Wählt man daher die Bezeichnung der Ausgangselemente so, daß

$$a > b > c > e$$

ist, so ist der Ansatz (4. 1) *der einzig mögliche*; jeder andere Ansatz mit permutierten Thetas ist zwar auch möglich, führt aber nicht auf rein imaginäre τ_{ik}; dies ist der Grund, weshalb wir seinerzeit den Gleichungen (4. 1) den Vorzug gaben [14]).

Wir beweisen nun zunächst das Bestehen der in b), c′), d) aufgestellten Relationen,

Ad (6. 6). Diese Beziehung ist schon von *Borchardt* bewiesen, vgl. (2. 6).

Ad (6. 7). Nach den *Göpel-Rosenhain*schen Relationen ist [15])

(7. 1) $$b_n' c_n' = a_n e_n' - e_n e_n'', \qquad b_n'' c_n'' = e_n e_n' - a_n e_n'',$$

also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n' c_n'}{b_n'' c_n''} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n e_n' - e_n e_n''}{e_n e_n' - a_n e_n''} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n)(e_n' + e_n'')}{e_n e_n' - a_n e_n''}.$$

Der Nenner sowie der Zähler sind positiv, also wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n)(e_n' + e_n'')}{e_n e_n' - a_n e_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n) e_n'}{e_n e_n - a_n e_n''} = \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n) e_n''}{e_n e_n' - a_n e_n''} = 0,$$

---

[13]) Ihm entspricht in zwei Variablen der Fall eines vollständigen elliptischen Integrals mit *reellem Modul kleiner als* 1.

[14]) Aus diesem Grunde ist unsere Uniformisierung der von *Hettner* (Crelle **112**, S. 106) angegebenen vorzuziehen. *Hettner* begeht an dieser Stelle offenbar einen Fehler, wenn er die τ_{ik} als rein imaginär voraussetzt und dann den Ansatz macht:

$$a:b:c:e = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}^2 : \begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}^2 : \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}^2 : \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}^2.$$

[15]) Vgl. A, S. 44.

und da

$$0 < \frac{(a_n - e_n)\,e_n''}{e_n' - e_n''} < a_n \frac{(a_n - e_n)\,e_n''}{e_n e_n' - a_n e_n''}$$

ist, folgt auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n)\,e_n''}{e_n' - e_n''} = 0. \tag{7. 2}$$

Nunmehr wird nach (7. 1)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n' c_n'}{e_n' - e_n''} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{(a_n - e_n)\,e_n''}{e_n' - e_n''} = \mu.$$

Ad (6. 10). Es ist nach Voraussetzung

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{c} + \sqrt{e},$$

$$\frac{\sqrt{c} - \sqrt{e}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > \frac{c - e}{a - b},$$

und da $\dfrac{1 - z}{1 + z}$ eine stets abnehmende Funktion von z ist, folgt

$$\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{e}}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{e}} < \frac{a - b - c + e}{a - b + c - e},$$

also nach (2. 7)

$$\frac{e_1}{c_1} = \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b} - \sqrt{c} + \sqrt{e}}{\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{e}}\right)^2 < \left(\frac{a - b - c + e}{a - b + c - e}\right)^2 = \left(\frac{e}{c}\right)^2,$$

somit allgemein

$$\frac{e_n}{c_n} = \left(\frac{e}{c}\right)^{2^n},$$

und da

$$\frac{e}{c} < 1,$$

wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{c_n} = 0. \tag{7. 3}$$

Nun ist aber stets

$$0 < \frac{e_n}{b_n} < \frac{e_n}{c_n},$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e_n}{b_n} = 0. \tag{7. 4}$$

Vermöge (2. 7) reduziert sich die Gleichung (6. 10) auf die folgende

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{b_n} + \sqrt{e_n}}{\sqrt{b_n} - \sqrt{e_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{c_n} + \sqrt{e_n}}{\sqrt{c_n} - \sqrt{e_n}} = 1,$$

die durch (7. 3), (7. 4) schon bewiesen ist.

Ad (6. 11). Vermittels des eben Bewiesenen nimmt (6. 11) die Form an

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n'}{\sqrt{b_n}+\sqrt{e_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n'}{\sqrt{b_n}}=\sqrt{\mu},$$
(7. 5)
$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n'}{\sqrt{c_n}+\sqrt{e_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n'}{\sqrt{c_n}}=\sqrt{\mu}.$$

Nun ist

$$b_n'=\frac{1}{2}\,(\sqrt{a_n b_n}+\sqrt{c_n e_n}),\quad c_n'=\frac{1}{2}\,(\sqrt{a_n c_n}+\sqrt{b_n e_n}),$$

also

$$\frac{b_n'}{\sqrt{b_n}}=\frac{1}{2}\sqrt{a_n}\left\{1+\sqrt{\frac{1}{a_n}}\sqrt{c_n\frac{e_n}{b_n}}\right\},\quad \frac{c_n'}{\sqrt{c_n}}=\frac{1}{2}\sqrt{a_n}\left\{1+\sqrt{\frac{1}{a_n}}\sqrt{b_n\frac{e_n}{c_n}}\right\},$$

und daraus ergibt sich (7. 5) mittels (2. 2), (7. 3), (7. 4).

Ad (6. 12). Es ist zu zeigen, daß

$$e_n'+e_n''\pm 2\sqrt{e_n' e_n''}<4c_n'$$

ist, es gilt aber

$$e_n''<e_n'<c_n',$$
$$e_n'+e_n''\pm 2\sqrt{e_n' e_n''}<2(e_n'+e_n'')<4e_n'<4c_n'.$$

Ja noch mehr! Aus

$$0<\frac{(\sqrt{e_n'}\pm\sqrt{e_n''})^2}{4c_n'}<\frac{e_n'}{c_n'}=\frac{\mathfrak{e}_{n-1}}{\mathfrak{c}_{n-1}}$$

und (7. 3) folgt sogar

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{e_n'}\pm\sqrt{e_n''})^2}{4c_n'}=0.\tag{7. 6}$$

Zur Vollendung unseres Beweises haben wir nun nur noch den Nachweis zu führen, daß auch die Forderung a) des vorigen Paragraphen erfüllt ist, d. h. daß die durch (6. 2), (6. 3), (6. 5) definierten Grenzwerte wirklich existieren.

Ad (6. 2). Der verlangte Nachweis ist erbracht, wenn gezeigt ist, daß die Größenfolge

$$\frac{b_1'}{4\mu}>\sqrt{\frac{b_2'}{4\mu}}>\sqrt[4]{\frac{b_3'}{4\mu}}>\cdots>\sqrt[2^{n-1}]{\frac{b_n'}{4\mu}}>\cdots$$

monoton abnehmend ist. Nun ist aber

$$\mathfrak{a}_1=a_1+b_1+c_1+e_1,$$
$$\mathfrak{a}_2=a_2+b_2+c_2+e_2=\frac{1}{4}\,(\sqrt{a_1}+\sqrt{b_1}+\sqrt{c_1}+\sqrt{e_1})^2,$$
$$4(\mathfrak{a}_1-\mathfrak{a}_2)=(\sqrt{a_1}-\sqrt{b_1})^2+(\sqrt{a_1}-\sqrt{c_1})^2+(\sqrt{a_1}-\sqrt{e_1})^2+(\sqrt{b_1}-\sqrt{c_1})^2$$
$$+(\sqrt{b_1}-\sqrt{e_1})^2+(\sqrt{c_1}-\sqrt{e_1})^2>0,$$

folglich

$$\mathfrak{a}>\mathfrak{a}_1>\mathfrak{a}_2>\mathfrak{a}_3\cdots>\lim_{n\to\infty}\mathfrak{a}_n=4\mu.$$

Andrerseits gilt

$$b_1'^2=\frac{1}{4}\,(\sqrt{\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1}+\sqrt{\mathfrak{c}_1\mathfrak{e}_1})^2>\frac{1}{4}\,\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1,$$
$$4\mu b_2'=\mu\mathfrak{b}_1,$$

also

$$\frac{b_1'^2}{4\mu b_2'} > \frac{\mathfrak{a}_1}{4\mu} > 1,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Ad (6. 3). In gleicher Weise gilt

$$\frac{c_1'}{4\mu} > \sqrt[4]{\frac{c_2'}{4\mu}} > \sqrt[4]{\frac{c_3'}{4\mu}} > \cdots > \sqrt[n-1]{\frac{c_n'}{4\mu}} > \cdots,$$

denn es ist

$$c_1'^2 = \frac{1}{4}\,(\sqrt{\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1} + \sqrt{\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{e}_1})^2 > \frac{1}{4}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{c}_1,$$

$$4\mu\,c_2' = \mu\,\mathfrak{c}_1,$$

und

$$\frac{c_1'^2}{4\mu\,c_2'} > \frac{\mathfrak{a}_1}{4\mu} > 1.$$

Ad (6.5). Da im Vorangehenden die Existenz von x und z erwiesen ist, genügt es nach (6.4) zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}{4\sqrt{\mu}}} = \sqrt[4]{xz}\cdot y^{-\frac{1}{2}}$$

existiert. Nun ist nach (2.6)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{e_n'} + \sqrt{e_n''}}{4\sqrt{\mu}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{e_n'}}{2\sqrt{\mu}}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{e_n''}{e_n'}}\right)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{e_n'}}{2\sqrt{\mu}}},$$

und somit nur die Existenz des letzteren Grenzwertes zu zeigen. Es ist aber

$$\mathfrak{a} > 4\mu,$$

$$e' = \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}} + \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}} > \frac{1}{2}\sqrt{\mathfrak{a}\,\mathfrak{e}} > \sqrt{\mu}\sqrt{\mathfrak{e}} = 2\sqrt{\mu}\sqrt{e_1'},$$

mithin

$$\frac{\sqrt{e'}}{2\sqrt{\mu}} > \sqrt{\frac{\sqrt{e_1'}}{2\sqrt{\mu}}} > \sqrt[4]{\frac{\sqrt{e_2'}}{2\sqrt{\mu}}} > \cdots > \sqrt[2^n]{\frac{\sqrt{e_n'}}{2\sqrt{\mu}}} > \cdots,$$

und diese monoton abnehmende Punktfolge besitzt notwendig einen Grenzwert. Damit ist der verlangte Beweis vollständig erledigt.

Rom, den 10. April 1928.

Eingegangen 14. April 1928.

Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen.

Von *Oskar Perron* in München.

Einleitung.

In dieser Arbeit handelt es sich um Systeme von Differenzengleichungen der Form

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die $a_{\nu\mu}$ Konstanten sind, wobei ferner $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ ist und im übrigen die $|\varphi_\nu|$ sehr klein sind, was genauer präzisiert werden wird. Die unabhängige Variable t soll die Werte 0, 1, 2, ... annehmen, während für $a_{\nu\mu}$, $x_\nu(t)$ und die Funktionen φ_ν beliebige komplexe Werte zugelassen sind.

Wegen $\varphi_\nu(t, 0, \ldots, 0) = 0$ haben die Differenzengleichungen jedenfalls die triviale Lösung $x_1(t) = 0, \ldots, x_n(t) = 0$. Diese nennen wir im Anschluß an die bei Differentialgleichungen übliche Terminologie *stabil*, wenn es eine positive Zahl a von folgender Art gibt: Jedem ε zwischen 0 und a läßt sich ein ε_1 zwischen 0 und ε so zuordnen, daß jede Lösung, deren Anfangswerte $x_\nu(0)$ der Ungleichung $0 < \Sigma|x_\nu(0)| < \varepsilon_1$ genügen, für $t > 0$ dauernd existiert und den Ungleichungen $\Sigma|x_\nu(t)| < \varepsilon$ genügt.

Andernfalls nennen wir die triviale Lösung *instabil*. Die Instabilität ist *vollkommen*, wenn es eine positive Zahl ε gibt derart, daß bei *jeder* Lösung, deren Anfangswerte der Ungleichung $0 < \Sigma|x_\nu(0)| < \varepsilon$ genügen, notwendig für ein endliches t einmal die Existenz aufhört [1]) oder wenigstens $\Sigma|x_\nu(t)| \geqq \varepsilon$ wird.

Zwischen dem Fall der Stabilität und der vollkommenen Instabilität liegt noch ein Fall, den wir als *unvollkommene Instabilität* oder auch als *bedingte Stabilität* bezeichnen. Dieser ist dadurch charakterisiert, daß es eine positive Zahl a von folgender Art gibt: Jeder Zahl ε zwischen 0 und a läßt sich ein ε_1 zwischen 0 und ε so zuordnen, daß wohl *einige* [2]), aber niemals *alle* Lösungen, für die $0 < \Sigma|x_\nu(0)| < \varepsilon_1$ ist, für $t > 0$ dauernd existieren und den Ungleichungen $\Sigma|x_\nu(t)| < \varepsilon$ genügen.

Wenn man in dem gegebenen Differenzengleichungssystem die Variable t ersetzt durch $t + T$, wo T eine positive ganze Zahl ist, und dann t wieder auf die Werte 0, 1, 2, ... beschränkt, so haben nicht die $x_\nu(0)$, sondern die $x_\nu(T)$ als Anfangswerte zu gelten. Dadurch können einerseits zu den seitherigen Lösungen noch weitere hinzukommen, nämlich solche, für welche zwar die Funktionswerte $x_\nu(T)$, $x_\nu(T+1)$ existieren, aber $x_\nu(T-1)$, $x_\nu(T-2)$, ..., $x_\nu(0)$ nicht alle zu existieren brauchen; andrerseits werden von den seitherigen Lösungen diejenigen wegfallen, bei welchen $x_\nu(t)$ für $t \geqq T$ nicht mehr existiert hat. Wegen dieses Umstands kann die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ ihren Stabilitätscharakter ändern. Wir nennen sie in bezug auf das ursprüngliche Differenzen-

[1]) Wenn die aus dem Differenzengleichungssystem rekurrent zu berechnenden Funktionswerte $x_\mu(t)$ für einen gewissen Wert $t = t_1$ nicht mehr im Existenzbereich der Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ liegen, so kann $x_\nu(t_1 + 1)$ nicht mehr berechnet werden, die Existenz hört also bei $t = t_1 + 1$ auf.

[2]) Gemeint ist: *mindestens eine*; aber dann sind es, weil ε beliebig verkleinert werden darf, von selbst unendlich viele.

gleichungssystem *im weiteren Sinne stabil*, *instabil*, *vollkommen instabil*, *unvollkommen instabil*, *bedingt stabil*, wenn jede hinreichend große ganze Zahl T die Eigenschaft hat, daß nach Ersetzung von t durch $t + T$ im gewöhnlichen Sinne Stabilität usw. vorliegt.

Die Stabilitätsfrage ist noch wenig behandelt worden, wie ja überhaupt die Literatur über nichtlineare Differenzengleichungen recht spärlich ist. Zu erwähnen sind eine Arbeit von *Horn* [3]) und eine von *Lattès* [4]). Herr *Horn* setzt die Funktionen φ_ν als Potenzreihen nach $\frac{1}{t}, x_1, \ldots, x_n$ voraus, gewinnt die allgemeine Lösung durch sukzessive Näherungen und gibt dann divergente, aber asymptotische Reihenentwicklungen für sie an. *Lattès*, der sich auf den Spezialfall einer Differenzengleichung n-ter Ordnung beschränkt, setzt φ_ν ebenfalls als Potenzreihe nach $x_1, \ldots, x_n$, aber frei von t voraus; er gewinnt dann die allgemeine Lösung in Form einer konvergenten Reihe, die das genaue Analogon zu den bekannten *Poincaré*schen Reihenentwicklungen für die Integrale entsprechender Differentialgleichungen ist.

Das meiste, was sich aus den Reihen von *Horn* und *Lattès* für die Frage der Stabilität und des asymptotischen Verhaltens herausholen läßt, gilt jedoch auch unter weit geringeren Voraussetzungen über die Funktionen φ_ν. Ich werde daher diesen Fragenkomplex unter wesentlich allgemeineren Annahmen nach einer neuen Methode behandeln. Im Fall der Stabilität ist es im allgemeinen so, daß die Lösungen $x_\nu(t)$ für $t \to \infty$ asymptotisch gegen Null streben. In §§ 6 und 7 wird dieses asymptotische Verhalten genauer untersucht, wobei sich zeigt, daß die Lösungen je nach den Anfangswerten in verschiedene Klassen zerfallen, die von verschiedener Ordnung klein werden. Es liegen hier ähnliche Verhältnisse vor, wie bei den von *Poincaré* und mir untersuchten linearen Differenzengleichungen, deren Koeffizienten für $t \to \infty$ gegen endliche Grenzwerte streben. Die früher auf diesem Gebiet von mir erzielten Resultate lassen sich auch als Spezialfälle unter die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit subsumieren (§ 8).

Meine Methode ist ganz analog zu der Methode, mit der ich kürzlich die entsprechende Frage bei Differentialgleichungen behandelt habe [5]), und hier sogar noch etwas leichter durchführbar. Nur die Unterscheidung zwischen Stabilität usw. im gewöhnlichen und im weiteren Sinne ist bei Differentialgleichungen nicht nötig. Zum besseren Vergleich sind beide Arbeiten völlig gleich gegliedert und die entsprechenden Sätze tragen die gleiche Nummer.

§ 1. Die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und die charakteristischen Wurzeln.

Um öftere Wiederholungen zu vermeiden, wollen wir hier einige abkürzende Festsetzungen treffen. Wie schon bemerkt, *nimmt die Variable t immer nur ganzzahlige nicht negative Werte an.*

I. Wenn die Funktion $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ für $t = 0, 1, 2 \ldots$ und in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leqq a, \ldots, |x_n| \leqq a,$$

---

[3]) *J. Horn*, Zur Theorie der nicht linearen Differential- und Differenzengleichungen. Dieses Journal **141** (1912), S. 182—216.

[4]) *S. Lattès*, Sur les suites recurrentes non linéaires et sur les fonctions génératrices de ces suites. Annales de la faculté des sciences de l'université de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques (3) **3** (1912), p. 73—124.

[5]) Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen. Mathematische Zeitschrift **29** (1928), S. 129—160.

wo natürlich $a > 0$ ist, definiert ist und der Ungleichung

$$|\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq K(|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

genügt, wo K eine positive Konstante, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{A}$. Offenbar ist dann von selbst

$$\varphi(t, 0, \ldots, 0) = 0,$$
$$|\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq n K a.$$

Wenn wir also von einer oder mehreren Funktionen $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ sagen, daß sie die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen, so ist damit immer ein Bereich für die Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ gegeben; wir nennen a die erste, K die zweite Konstante der Bedingung $\mathfrak{A}$.

II. Wenn die Funktion $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ der Forderung genügt

$$\frac{\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)}{|x_1| + \cdots + |x_n|} \to 0 \qquad \text{für } |x_1| + \cdots + |x_n| \to 0, \quad t \to \infty,$$

d. h. wenn jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß für

$$|x_1| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad |x_1| + \cdots + |x_n| > 0, \qquad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichung

$$|\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \varepsilon(|x_1| + \cdots + |x_n|)$$

gilt, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{B}$.

Die Bedingung $\mathfrak{B}$ ist z. B. erfüllt, wenn für alle hinreichend großen (ganzzahligen) t gleichmäßig die Beziehung gilt:

$$\lim_{\substack{x_1 \to 0 \\ \cdots \\ x_n \to 0}} \frac{\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)}{|x_1| + \cdots + |x_n|} = 0;$$

ebenso auch, wenn in einem Bereich der Gestalt

$$|x_1| \leqq a, \ldots, |x_n| \leqq a, \qquad |x_1| + \cdots + |x_n| > 0$$

gleichmäßig die Beziehung gilt:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)}{|x_1| + \cdots + |x_n|} = 0.$$

III. Wenn die Funktion $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ so beschaffen ist, daß jeder positiven Zahl ε zwei positive Zahlen δ_ε und T_ε zugeordnet werden können derart, daß für

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, \quad |x_1''| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, \quad |x_n''| \leqq \delta_\varepsilon, \quad t \geqq T_\varepsilon$$

stets die Ungleichung

$$|\varphi(t, x_1', \ldots, x_n') - \varphi(t, x_1'', \ldots, x_n'')| \leqq \varepsilon(|x_1' - x_1''| + \cdots + |x_n' - x_n''|)$$

gilt, so sagen wir, die Funktion erfüllt die Bedingung $\mathfrak{C}$.

Man sieht leicht, wenn die Funktion $\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ erfüllt, so erfüllt sie von selbst auch die Bedingung $\mathfrak{B}$. Denn wegen der Bedingung $\mathfrak{A}$ ist $\varphi(t, 0, \ldots, 0) = 0$ und also wegen der Bedingung $\mathfrak{C}$, wenn man sie speziell für $x_1'' = 0, \ldots, x_n'' = 0$ in Anspruch nimmt,

$$|\varphi(t, x_1', \ldots, x_n')| \leqq \varepsilon(|x_1'| + \cdots + |x_n'|)$$

für

$$|x_1'| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n'| \leqq \delta_\varepsilon, \qquad t \geqq T_\varepsilon.$$

Das bedeutet aber das Erfülltsein der Bedingung $\mathfrak{B}$.

IV. Wenn die beiden Funktionen

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + \varphi(t, x_1, \ldots, x_n),$$
$$b_1 x_1 + \cdots + b_n x_n + \psi(t, x_1, \ldots, x_n),$$

wo die a_ν, b_ν Konstanten sind, miteinander identisch sind und wenn die Funktionen φ, ψ die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen, so sieht man leicht, daß dann notwendig

$$a_1 = b_1 \ldots, a_n = b_n, \qquad \varphi = \psi$$

ist. In der Tat ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$

$$|(a_1 - b_1) x_1 + \cdots + (a_n - b_n) x_n|$$
$$= |\psi - \varphi| \leqq |\psi| + |\varphi| \leqq 2\varepsilon(|x_1| + \cdots + |x_n|),$$

sobald nur

$$|x_1| \leqq \delta_\varepsilon, \ldots, |x_n| \leqq \delta_\varepsilon, \quad |x_1| + \cdots + |x_n| > 0, \quad t \geqq T_\varepsilon$$

ist. Setzt man insbesondere alle $x_\nu = 0$ bis auf eines, etwa x_k, so kommt

$$|(a_k - b_k) x_k| \leqq 2\varepsilon |x_k|, \quad \text{also} \quad |a_k - b_k| \leqq 2\varepsilon.$$

Da aber ε beliebig klein sein darf, ergibt sich $a_k = b_k$. Das gilt für alle k, und damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn in dem Differenzengleichungssystem

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung $\mathfrak{B}$ erfüllen, so sind hiernach die Konstanten $a_{\nu\mu}$ eindeutig. Daher sind auch die Wurzeln der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & a_{12} \ldots . a_{1n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \qquad a_{n2} \ldots . a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0$$

eindeutig bestimmt. Wir nennen sie die *charakteristischen Wurzeln* des Differenzengleichungssystems.

§ 2. Vorbereitende Sätze.

Satz 1. *Wenn die für $t = \tau_0, \tau_0 + 1, \ldots, \tau_1$ definierten Funktionen*

$$x_1(t), \ldots, x_n(t)$$

für $\tau_0 \leqq t < \tau_1$ dem Differenzengleichungssystem genügen:

$$x_\nu(t+1) = \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen, so gilt für $\tau_0 \leqq t_0 < t_1 \leqq \tau_1$ stets die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t_1)| \leqq (nK)^{t_1 - t_0} \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t_0)|,$$

wo K die zweite Konstante der Bedingung $\mathfrak{A}$ bedeutet.

Beweis. Aus dem gegebenen Differenzengleichungssystem folgt wegen der Bedingung $\mathfrak{A}$

$$|x_\nu(t+1)| \leqq K \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)| \qquad \text{für } t = \tau_0, \tau_0 + 1, \ldots, \tau_1 - 1,$$

und also durch Summation nach ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t+1)| \leqq nK \sum_{\mu=1}^{n} |x_\mu(t)|.$$

Wendet man diese Formel der Reihe nach für $t = t_0, t_0 + 1, \ldots, t_1 - 1$ an, so kommt sogleich die in Satz 1 behauptete Ungleichung.

Satz 2. *Wenn die Funktionen $x_\nu(t)$ in Satz 1 für einen gewissen Wert $t = t_1$ nicht sämtlich verschwinden, so können sie für $t = t_0 < t_1$ auch nicht sämtlich verschwinden* [6]).

Wenn sie nämlich für t_0 sämtlich verschwinden würden, so müßten sie nach Satz 1 auch für t_1 sämtlich verschwinden.

Satz 3. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen, so kann man jedem Paar positiver Zahlen T, ε (T beliebig groß und ganz, ε beliebig klein) eine positive Zahl $\delta = \delta_{T,\varepsilon}$ so zuordnen, daß eine Lösung, deren Anfangswerte $x_\nu(0)$ den Ungleichungen

$$|x_1(0)| \leqq \delta, \ldots, |x_n(0)| \leqq \delta$$

genügen, mindestens bis zur Stelle $t = T$ existiert und dabei dauernd den Ungleichungen genügt:

$$|x_1(t)| \leqq \varepsilon, \ldots, |x_n(t)| \leqq \varepsilon.$$

Beweis. Man darf natürlich ε kleiner denken als die erste Konstante a der Bedingung $\mathfrak{A}$. Wählt man dann

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{n}, & \text{falls } nK \leqq 1 \\ \dfrac{\varepsilon}{n}(nK)^{-T}, & \text{falls } nK > 1, \end{cases}$$

wo K die zweite Konstante der Bedingung $\mathfrak{A}$ bedeutet, so ist die Ungleichung

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)| \leqq \begin{cases} \varepsilon < a, & \text{falls } nK \leqq 1 \\ \varepsilon(nK)^{t-T} \leqq \varepsilon < a, & \text{falls } nK > 1 \end{cases}$$

jedenfalls für $t = 0$ richtig. Wenn sie aber für einen gewissen Wert t, der kleiner als T ist, gilt, so folgt weiter aus den gegebenen Differenzengleichungen wegen der Bedingung $\mathfrak{A}$

$$|x_\nu(t+1)| \leqq \begin{cases} K\varepsilon, & \text{falls } nK \leqq 1 \\ K\varepsilon(nK)^{t-T}, & \text{falls } nK > 1 \end{cases}$$

und durch Summation nach ν

$$\sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t+1)| \leqq \begin{cases} nK\varepsilon \leqq \varepsilon < a, & \text{falls } nK \leqq 1 \\ \varepsilon(nK)^{t+1-T} \leqq \varepsilon < a, & \text{falls } nK > 1. \end{cases}$$

Daher ist in der Tat $x_\nu(t)$ für $t \leqq T$ dauernd vorhanden und absolut $\leqq \varepsilon$.

§ 3. Kriterien für Stabilität.

Satz 4. *In dem Differenzengleichungssystem* [7])

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(t) + \psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen die Konstanten ϱ_ν absolut kleiner als 1 sein und es mögen drei Zahlen γ, C, $\varkappa$ durch die Formeln

---

[6]) Wohl aber können sie für $t = t_0 > t_1$ sämtlich verschwinden, im Gegensatz zu dem analogen Satz über Differentialgleichungen. Das tritt z. B. ein, wenn die Funktionen φ_ν identisch verschwinden.

[7]) Hier und auch überall später ist unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=1}^{\nu-1} a_\mu$, wenn $\nu = 1$ ist, stets die Null zu verstehen. Ebenso ist später unter einer Summe der Form $\sum_{\mu=k+1}^{n} a_\mu$, wenn $k = n$ ist, stets die Null zu verstehen.

$$\gamma = \mathrm{Max}\,|\varrho_\nu|, \quad C = \mathrm{Max}\,|c_{\nu\mu}|, \quad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

definiert werden, so daß $0 < \alpha < 1$ *ist. Wenn dann die Funktionen* $\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *die Bedingung* $\mathfrak{A}$ *erfüllen und in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen*

$$|\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu|$$

genügen, so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ *stabil, und zwar gelten für jede Lösung, deren Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen*

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0.$$

Beweis. Ist a die erste Konstante der Bedingung $\mathfrak{A}$ und ε eine Zahl zwischen 0 und a, so wählen wir die Anfangswerte $x_\mu(0)$ so ,daß

$$|x_\mu(0)| \leqq \frac{\varepsilon\,\alpha^{n-\mu}}{n} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

ist. Dann ist gewiß $|x_\mu(0)| < \varepsilon < a$, so daß die Werte $x_\mu(0)$ im Definitionsbereich der Funktionen ψ_ν liegen. Wir behaupten, daß die aus den Differenzengleichungen rekurrent zu berechnenden Werte $x_\mu(t)$ für alle t der Ungleichung genügen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)| \leqq \left(\frac{1+\gamma}{2}\right)^t \varepsilon\,\alpha^n; \tag{2}$$

wegen $\gamma < 1$, $\alpha < 1$ ist dann gewiß $|x_\mu(t)| \leqq \varepsilon < a$, so daß die Werte $x_\mu(t)$ im Definitionsbereich der Funktionen ψ_ν bleiben und also die $x_\nu(t+1)$ wirklich sukzessive berechnet werden können.

Wegen (1) gilt die Formel (2) jedenfalls für $t = 0$. Wenn sie aber für einen gewissen Wert t gilt, so folgt aus den in Satz 4 vorliegenden Differenzengleichungen auf Grund der dabei gemachten Voraussetzungen:

$$\begin{aligned}
|x_\nu(t+1)| &\leqq |\varrho_\nu x_\nu(t)| + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |c_{\nu\mu} x_\mu(t)| + |\psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| \\
&\leqq \gamma\,|x_\nu(t)| + C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu(t)| + \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)| \\
&\leqq \gamma\,|x_\nu(t)| + C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} \alpha^{1-\nu+\mu} |x_\mu(t)| + \alpha^{1-\nu} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)|\,.
\end{aligned}$$

Wenn man hier im mittleren Glied der letzten Zeile die Summe bis n ausdehnt statt nur bis $\nu - 1$, so gilt die entstehende Ungleichung erst recht. Wenn man dann mit α^ν multipliziert und nach ν summiert, ergibt sich

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha^\nu |x_\nu(t+1)| \leqq (\gamma + nC\alpha + n\alpha) \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)| = \left(\frac{1+\gamma}{2}\right) \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)|\,.$$

Das besagt aber, daß die Ungleichung (2) auch für $t+1$ an Stelle von t, also allgemein, in Kraft bleibt. Wegen $\gamma < 1$ ist damit Satz 4 bewiesen.

Satz 5. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *die Bedingungen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *erfüllen und wenn die absoluten Beträge der charakteristischen Wurzeln sämtlich kleiner als 1 sind, so ist die triviale Lösung* $x_\nu(t) = 0$ *stabil, und zwar gelten für jede Lösung, deren Anfangswerte* $x_\nu(0)$ *absolut hinreichend klein sind, sogar die Beziehungen*

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0, \ldots, \quad \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0.$$

Beweis. Bezeichnet man die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

mit A und die charakteristischen Wurzeln mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$, so kann man bekanntlich auf mannigfache Art eine Matrix B mit von Null verschiedener Determinante angeben, für welche

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \varrho_1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & \varrho_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & \varrho_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

ist. Dabei können die Konstanten $c_{\nu\mu}$, wenn alle ϱ_λ voneinander verschieden sind, durch geeignete Wahl von B sogar alle gleich Null gemacht werden; wenn gleiche ϱ_λ vorhanden sind, ist das im allgemeinen nicht möglich, doch wird das gar keine Rolle spielen.

Macht man jetzt die lineare Transformation

$$(x_1, \ldots, x_n) = B(y_1, \ldots, y_n), \tag{4}$$

so geht das Differenzengleichungssystem von Satz 5 über in

$$y_\nu(t+1) = \varrho_\nu y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(t) + \psi_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{5}$$

wo offenbar die Funktionen $\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ ebenfalls die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Führt man daher wie in Satz 4 die Abkürzungen

$$\gamma = \operatorname{Max} |\varrho_\nu|, \qquad C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

ein, so ist wegen der Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewiß

$$|\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \alpha^n \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu|,$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\nu|$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, \quad |y_1| \leqq \delta, \ldots, |y_n| \leqq \delta.$$

Auf das Gleichungssystem (5) kann daher, wenn darin t durch $t+T$ ersetzt wird, der Satz 4 angewandt werden. Hiernach ist jede Lösung $y_\nu(t)$ von (5), die für $t = T$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt, bis zu beliebig großen Werten von t berechenbar und die $|y_\nu(t)|$ bleiben dabei dauernd unter einer willkürlich vorgebbaren Schranke und streben gegen Null. Entsprechendes gilt daher auch vermöge der Transformation (4) für jede Lösung $x_\nu(t)$ des ursprünglichen Systems, welche für $t = T$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt. Letzteres ist aber nach Satz 3 bei jeder Lösung der Fall, welche für $t = 0$ absolut hinreichend kleine Werte annimmt, und damit ist Satz 5 bewiesen.

§ 4. Kriterien für Instabilität.

Satz 6. *In dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(t) + \psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sei für einen gewissen Index k

$$|\varrho_\nu| \geqq \frac{1}{\gamma} > 1 \quad \text{für } \nu \leqq k$$

und, sofern nicht $k = n$ *ist,*

$$|\varrho_\nu| \leqq 1 \quad \text{für } \nu > k.$$

Ferner seien die Zahlen C, α *durch die Formeln*

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

definiert, so daß $0 < \alpha < 1$ *ist. Wenn dann die Funktionen* $\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *die Bedingung* $\mathfrak{A}$ *erfüllen und in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen*

$$|\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu|$$

genügen, so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ *instabil. Falls* $k = n$ *ist, ist sie sogar vollkommen instabil.*

Beweis. Aus den Differenzengleichungen ergibt sich

$$|x_\nu(t+1)| \begin{cases} \leqq |\varrho_\nu x_\nu(t)| + C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu(t)| + |\psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| \\ \geqq |\varrho_\nu x_\nu(t)| - C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |x_\mu(t)| - |\psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))|. \end{cases}$$

Definiert man daher zwei Funktionen $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ durch die Formeln [8])

$$\Phi(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^\nu |x_\nu(t)|, \qquad \Psi(t) = \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha^\nu |x_\nu(t)|,$$

so ist wegen $0 < \alpha < 1$

$$\begin{aligned} &\Phi(t+1) - \Psi(t+1) \\ &\geqq \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^\nu |\varrho_\nu x_\nu(t)| - \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha^\nu |\varrho_\nu x_\nu(t)| - C \sum_{\nu>\mu}^{1,n} \alpha^\nu |x_\mu(t)| - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^\nu |\psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t))| \\ &\geqq \frac{1}{\gamma} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha^\nu |x_\nu(t)| - \sum_{\nu=k+1}^{n} \alpha^\nu |x_\nu(t)| - nC\alpha \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu(t)| - \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^{\nu+\mu} |x_\mu(t)| \\ &\geqq \frac{1}{\gamma} \Phi(t) - \Psi(t) - nC\alpha [\Phi(t) + \Psi(t)] - n\alpha [\Phi(t) + \Psi(t)]. \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf

$$nC\alpha + n\alpha = \frac{1-\gamma}{2} < \frac{1-\gamma}{2\gamma}$$

ergibt sich hieraus

$$\Phi(t+1) - \Psi(t+1) \geqq \frac{1}{\gamma} \Phi(t) - \Psi(t) - \frac{1-\gamma}{2\gamma} [\Phi(t) + \Psi(t)] = \frac{1+\gamma}{2\gamma} [\Phi(t) - \Psi(t)].$$

Nun ist aber $\frac{1+\gamma}{2\gamma} > 1$. Wählt man daher die Anfangswerte $x_\nu(0)$ so, daß sie zwar absolut beliebig klein sind, daß aber $\Phi(0) - \Psi(0) > 0$ ist, so kann $\Phi(t) - \Psi(t)$ nicht dauernd unter einer festen Schranke bleiben, womit die Instabilität bewiesen ist.

Speziell für $k = n$ ist $\Psi(t) = 0$ und

$$\Phi(0) - \Psi(0) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha^\nu |x_\nu(0)|,$$

also bei *jeder* Wahl der Anfangswerte positiv, so daß jetzt $\Phi(t) - \Psi(t)$ bei *keiner* Wahl dauernd unter einer festen Schranke bleiben kann; die Instabilität ist daher in diesem Falle vollkommen.

---

[8]) Dazu vergleiche man die Fußnote [7]) auf Seite 45.

Satz 7. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn von den charakteristischen Wurzeln mindestens eine absolut größer als 1 ist, so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ im weiteren Sinne instabil. Wenn sogar alle charakteristischen Wurzeln absolut größer als 1 sind, ist sie im weiteren Sinne vollkommen instabil.

Beweis. Bezeichnet man die charakteristischen Wurzeln mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und numeriert sie so, daß diejenigen, die absolut größer als 1 sind, zuerst kommen, so läßt sich wie beim Beweis von Satz 5 durch die dortige Transformation (4) das Differenzengleichungssystem überführen in

$$(6) \qquad y_\nu(t+1) = \varrho_\nu y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(t) + \psi_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2 \ldots, n),$$

wo die Funktionen $\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Bezeichnet man daher die kleinste derjenigen Zahlen $|\varrho_\nu|$, die größer als 1 sind, mit $\frac{1}{\gamma}$ und führt wie in Satz 6 die Abkürzungen

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

ein, so ist wegen der Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gewiß

$$|\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)| \leqq \alpha^n \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu|,$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\nu|$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, \quad |y_1| \leqq \delta, \ldots, |y_n| \leqq \delta,$$

wobei natürlich T auch durch jede größere ganze Zahl ersetzt werden darf. Daher kann auf das System (6), wenn darin t durch $t + T$ ersetzt wird, der Satz 6 angewandt werden, und damit ist auch Satz 7 bewiesen.

§ 5. Kriterien für bedingte Stabilität.

Satz 8. *In dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(t) + \psi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sei für einen gewissen Index k, der kleiner als n ist,

$$|\varrho_\nu| \geqq \frac{1}{\gamma} > 1 \qquad \text{für } \nu \leqq k,$$
$$|\varrho_\nu| \leqq \gamma < 1 \qquad \text{für } \nu > k.$$

Ferner seien die Zahlen C, α durch die Formeln

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

definiert, so daß $0 < \alpha < 1$ ist. Wenn dann die Funktionen $\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingung $\mathfrak{A}$ erfüllen und außerdem in dem dadurch gegebenen Bereich den Ungleichungen

$$|\psi_\nu(t, x_1', \ldots, x_n') - \psi_\nu(t, x_1'', \ldots, x_n'')| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |x_\mu' - x_\mu''|$$

genügen, so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ bedingt stabil. Ist nämlich ε eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl und sind $c_{k+1}, \ldots, c_n$ irgendwelche Konstanten, für die

$$|c_\nu| \leqq \varepsilon \alpha^{-\nu} \qquad (\nu = k+1, \ldots, n)$$

ist, so gibt es genau eine Lösung $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, *die für* $t = 0, 1, 2, \ldots$ *dauernd existiert und den Nebenbedingungen genügt:*

$$x_{k+1}(0) = c_{k+1}, \ldots, x_n(0) = c_n,$$
$$|x_\nu(t)| \leqq 2\varepsilon \alpha^{-\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Beweis. Seien t_0, t_1 zwei ganze nicht negative Zahlen und zwar $t_0 \leqq t_1$. Wenn man in den gegebenen Differenzengleichungen die Variable t ersetzt durch τ, sodann mit $\varrho_\nu^{t_1-\tau}$ multipliziert und nach τ von t_0 bis t_1 summiert[9]), ergibt sich

$$(7) \quad x_\nu(t_1+1) - \varrho_\nu^{t_1-t_0+1} x_\nu(t_0) = \sum_{\tau=t_0}^{t_1} \varrho_\nu^{t_1-\tau}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\right].$$

Für $\nu \leqq k$ ist nach Voraussetzung $|\varrho_\nu| > 1$. Wir können daher die Gleichung (7) noch mit $\varrho_\nu^{t_0-t_1-1}$ multiplizieren, worauf die linke Seite, wenn $x_\nu(t)$ beschränkt bleiben soll, für $t_1 \to \infty$ einem endlichen Grenzwert zustrebt; wir setzen daher $t_0 = t$ und gehen zur Grenze $t_1 \to \infty$ über. Für $\nu > k$ dagegen beachten wir, daß $x_\nu(0) = c_\nu$ sein soll und setzen in (7): $t_0 = 0$, $t_1 = t-1$. So ergibt sich

$$(8) \quad \begin{cases} x_\nu(t) = & -\sum_{\tau=t}^{\infty} \varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\right] & \text{für } \nu \leqq k, \\ x_\nu(t) = c_\nu \varrho_\nu^t + & \sum_{\tau=0}^{t-1} \varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} x_\mu(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\right] & \text{für } \nu > k. \end{cases}$$

In der zweiten Formel (8) muß zunächst $t \geqq 1$ sein; wir erreichen aber, daß sie unverändert auch für $t = 0$ gilt, indem wir unter $\sum_{\tau=0}^{-1}$ die Null verstehen. Umgekehrt geht dann aus dem Gleichungssystem (8) auch ohne weiteres wieder das in Satz 8 gegebene Differenzengleichungssystem nebst den Anfangsbedingungen hervor. Es genügt daher zu beweisen, daß das Gleichungssystem (8) genau *eine* Lösung $x_\nu(t)$ mit den in Satz 8 behaupteten Eigenschaften hat.

Wir zeigen zuerst, daß es *höchstens eine* solche Lösung gibt. Nehmen wir an, es gäbe zwei, etwa $x_\nu(t) = y_\nu(t)$ und $x_\nu(t) = z_\nu(t)$, so folgt aus (8)

$$(9) \quad \begin{cases} y_\nu(t) - z_\nu(t) = -\sum_{\tau=t}^{\infty} \varrho_\nu^{t-\tau-1} \Omega_\nu(\tau) & \text{für } \nu \leqq k, \\ y_\nu(t) - z_\nu(t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} \varrho_\nu^{t-\tau-1} \Omega_\nu(\tau) & \text{für } \nu > k, \end{cases}$$

wo in beiden Fällen

$$\Omega_\nu(\tau) = \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu}[y_\mu(\tau) - z_\mu(\tau)] + \psi_\nu(\tau, y_1(\tau), \ldots, y_n(\tau)) - \psi_\nu(\tau, z_1(\tau), \ldots, z_n(\tau))$$

ist. Auf Grund der in Satz 8 formulierten Voraussetzungen ergibt sich hieraus die Abschätzung

$$|\Omega_\nu(\tau)| \leqq C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |y_\mu(\tau) - z_\mu(\tau)| + \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu(\tau) - z_\mu(\tau)|.$$

Bezeichnet man daher die obere Grenze der beschränkten Funktion von t

$$\sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu(t) - z_\mu(t)|$$

mit M, so ergibt sich weiter

---

[9]) Man beachte, daß dabei der Exponent $t_1 - \tau$ von ϱ_ν nie negativ wird, was mit Rücksicht auf die Möglichkeit $\varrho_\nu = 0$ wesentlich ist; unter 0^0 ist 1 zu verstehen, nicht 0.

$$|\Omega_\nu(\tau)| \leqq C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}|\alpha^{1-\nu+\mu}y_\mu(\tau) - z_\mu(\tau)| + M$$
$$\leqq C\alpha^{1-\nu}M + \alpha^{1-\nu}M = \alpha^{1-\nu}(C+1)M,$$

und aus (9) erhält man dann

$$|y_\nu(t) - z_\nu(t)| \leqq \sum_{\tau=t}^{\infty}|\varrho_\nu|^{t-\tau-1}\alpha^{1-\nu}(C+1)M \qquad \text{für } \nu \leqq k,$$

$$|y_\nu(t) - z_\nu(t)| \leqq \sum_{\tau=0}^{t-1}|\varrho_\nu|^{t-\tau-1}\alpha^{1-\nu}(C+1)M \qquad \text{für } \nu > k.$$

Hieraus folgt aber für $\nu \leqq k$, weil dann nach Voraussetzung $|\varrho_\nu| \geqq \frac{1}{\gamma} > 1$ ist,

$$\alpha^\nu|y_\nu(t) - z_\nu(t)| \leqq \alpha(C+1)M\sum_{\tau=t}^{\infty}\gamma^{\tau-t+1} = \alpha(C+1)M\,\frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{M\gamma}{2n} \leqq \frac{M}{2n},$$

und analog für $\nu > k$, weil dann $|\varrho_\nu| \leqq \gamma < 1$ ist,

$$\alpha^\nu|y_\nu(t) - z_\nu(t)| \leqq \alpha(C+1)M\sum_{\tau=0}^{t-1}\gamma^{t-\tau-1} \leqq \alpha(C+1)M\,\frac{1}{1-\gamma} = \frac{M}{2n}.$$

Durch Summation nach ν erhält man hieraus

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^\nu|y_\nu(t) - z_\nu(t)| \leqq \frac{M}{2}.$$

Daher ist auch die obere Grenze der linken Seite $\leqq \frac{M}{2}$; also $M \leqq \frac{M}{2}$ und somit $M = 0$. Das besagt aber, daß die beiden Lösungen $y_\nu(t)$ und $z_\nu(t)$ miteinander identisch sind.

Um jetzt zu zeigen, daß es auch wirklich eine Lösung der verlangten Art gibt, lösen wir die Gleichungen (8) durch sukzessive Näherungen, indem wir setzen:

$$(10)\quad \begin{cases} x_{\nu 0}(t) = 0 \qquad \text{für } \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ x_{\nu,\lambda+1}(t) = -\sum_{\tau=t}^{\infty}\varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1}c_{\nu\mu}x_{\mu\lambda}(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_{1\lambda}(\tau), \ldots, x_{n\lambda}(\tau))\right] & \text{für } \nu \leqq k, \\ x_{\nu,\lambda+1}(t) = c_\nu\varrho_\nu^t + \sum_{\tau=0}^{t-1}\varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1}c_{\nu\mu}x_{\mu\lambda}(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_{1\lambda}(\tau), \ldots, x_{n\lambda}(\tau))\right] & \text{für } \nu > k. \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß die Funktionswerte von $|x_{\mu\lambda}(t)|$ stets $\leqq 2\varepsilon\alpha^{-\mu}$ sind, also (wenn ε klein genug gewählt wurde) im Definitionsbereich der Funktionen $\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ bleiben, so daß die $x_{\nu,\lambda+1}(t)$ wirklich sukzessive berechnet werden können. Denn jedenfalls trifft das für $\lambda = 0$ zu. Wenn es aber für einen gewissen Wert λ zutrifft, so folgt [10]) aus (10) für $\nu \leqq k$, weil dann $|\varrho_\nu| \geqq \frac{1}{\gamma} > 1$ ist,

$$|x_{\nu,\lambda+1}(t)| \leqq \sum_{\tau=t}^{\infty}\gamma^{\tau-t+1}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}2\varepsilon\alpha^{-\mu} + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu 2\varepsilon\alpha^{-\mu}\right]$$
$$\leqq \frac{\gamma}{1-\gamma}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}2\varepsilon\alpha^{1-\nu} + 2n\varepsilon\right]$$
$$\leqq \frac{1}{1-\gamma}\left(2Cn\varepsilon\alpha^{1-\nu} + 2n\varepsilon\alpha^{1-\nu}\right) = \varepsilon\alpha^{-\nu} < 2\varepsilon\alpha^{-\nu},$$

und analog für $\nu > k$, weil dann $|\varrho_\nu| \leqq \gamma < 1$ ist,

---

[10]) Dabei wird die Ungleichung

$$|\psi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)| \leqq \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu|x_\mu|$$

benutzt, die sogleich aus den Bedingungen von Satz 8 folgt, indem man dort $x'_\mu = 0$ setzt.

$$|x_{\nu,\lambda+1}(t)| \leqq |c_\nu|\,\gamma^t + \sum_{\tau=0}^{t-1}\gamma^{t-\tau-1}\Big[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}2\,\varepsilon\,\alpha^{-\mu} + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu\,2\,\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big]$$
$$\leqq \varepsilon\alpha^{-\nu} + \frac{1}{1-\gamma}\,(2Cn\,\varepsilon\,\alpha^{1-\nu} + 2n\,\varepsilon\,\alpha^{1-\nu})$$
$$= \varepsilon\alpha^{-\nu} + \varepsilon\alpha^{-\nu} = 2\,\varepsilon\,\alpha^{-\nu}.$$

Die $x_{\nu\lambda}(t)$ können also für alle λ gebildet werden. Nun zeigen wir weiter, daß

$$|x_{\nu\lambda}(t) - x_{\nu,\lambda-1}(t)| \leqq \varepsilon\,\alpha^{-\nu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2} \tag{11}$$

ist. In der Tat gilt diese Ungleichung nach dem Bewiesenen jedenfalls für $\lambda = 1$. Wenn sie aber für einen gewissen Wert λ gilt, so folgt aus (10) für $\nu \leqq k$:

$$|x_{\nu,\lambda+1}(t) - x_{\nu\lambda}(t)| \leqq \sum_{\tau=t}^{\infty}\gamma^{\tau-t+1}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2} + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu\,\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}\right]$$
$$\leqq \frac{\gamma}{1-\gamma}\,\varepsilon\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{-\mu} + n\right],$$

und analog für $\nu > k$:

$$|x_{\nu,\lambda+1}(t) - x_{\nu\lambda}(t)| \leqq \sum_{\tau=0}^{t-1}\gamma^{t-\tau-1}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2} + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu\,\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}\right]$$
$$\leqq \frac{1}{1-\gamma}\,\varepsilon\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}\left[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{-\mu} + n\right].$$

Daher ist schließlich für alle ν

$$|x_{\nu,\lambda+1}(t) - x_{\nu\lambda}(t)| \leqq \frac{1}{1-\gamma}\,\varepsilon\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}\Big[C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{1-\nu} + n\,\alpha^{1-\nu}\Big]$$
$$\leqq \frac{\varepsilon\,\alpha^{-\nu}}{1-\gamma}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}(Cn\,\alpha + n\,\alpha)$$
$$= \varepsilon\,\alpha^{-\nu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-1},$$

womit die Ungleichung (11) allgemein bewiesen ist.

Wegen (11) sind die Grenzwerte

$$\lim_{\lambda\to\infty} x_{\nu\lambda}(t) = x_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

gleichmäßig für $t = 0, 1, 2, \ldots$ vorhanden. Wegen $|x_{\nu\lambda}(t)| \leqq 2\,\varepsilon\,\alpha^{-\nu}$ ist auch $|x_\nu(t)| \leqq 2\,\varepsilon\,\alpha^{-\nu}$. Die Funktionen $x_\nu(t)$ bleiben also absolut unter der in Satz 8 behaupteten Schranke. Sie genügen aber auch wirklich dem Gleichungssystem (8). Das ergibt sich sogleich, indem man in (10) zur Grenze $\lambda \to \infty$ übergeht, wobei nur die Formel

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{\tau=t}^{\infty}\varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1}c_{\nu\mu}\,x_{\mu\lambda}(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_{1\lambda}(\tau), \ldots, x_{n\lambda}(\tau))\right]$$
$$= \sum_{\tau=t}^{\infty}\varrho_\nu^{t-\tau-1}\left[\sum_{\mu=1}^{\nu-1}c_{\nu\mu}\,x_\mu(\tau) + \psi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\right] \qquad \text{für } \nu \leqq k$$

einer genaueren Begründung bedarf. Nun folgt aber aus (11) und (12) für $\nu \leqq k$

$$|x_\nu(t)| - x_{\nu\lambda}(t)| \leqq \varepsilon\,\alpha^{-\nu}\left[\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-1} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda} + \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda+1} + \cdots\right] = \varepsilon\,\alpha^{-\nu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}.$$

Daher ist für $\nu \leqq k$

$$\Big|\sum_{\mu=1}^{\nu-1}c_{\nu\mu}[x_{\mu\lambda}(\tau) - x_\mu(\tau)] + \psi_\nu(\tau, x_{1\lambda}(\tau), \ldots, x_{n\lambda}(\tau)) - \psi_\nu(\tau, x_1(\tau), \ldots, x_n(\tau))\Big|$$
$$\leqq C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2} + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^\mu\,\varepsilon\,\alpha^{-\mu}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\lambda-2}.$$

Hier kann man den Faktor $\left(\frac{1}{2}\right)^{i-2}$ vorziehen, wodurch sogleich die zu beweisende Limesformel hervorgeht.

Satz 9. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, also von selbst auch $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn k von den charakteristischen Wurzeln absolut größer und $n-k$ absolut kleiner als 1 sind (wobei $k \geqq 1$ und $n-k \geqq 1$ ist), so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ im weiteren Sinne bedingt stabil, und zwar bilden, wenn η eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl ist, diejenigen Lösungen $x_\nu(t)$, welche für alle hinreichend großen t existieren und den Ungleichungen $|x_\nu(t)| \leqq \eta$ genügen, eine Schar mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten.

Beweis. Bezeichnet man die charakteristischen Wurzeln wieder mit $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ und numeriert sie so, daß die, welche absolut größer als 1 sind, zuerst kommen, so kann man offenbar eine Zahl γ derart angeben, daß

$$|\varrho_\nu| \geqq \frac{1}{\gamma} > 1 \qquad \text{für } \nu \leqq k,$$
$$|\varrho_\nu| \leqq \gamma < 1 \qquad \text{für } \nu > k$$

ist. Alsdann läßt sich wie beim Beweis von Satz 5 durch die dortige Transformation (4) das Differenzengleichungssystem überführen in

$$(13) \qquad y_\nu(t+1) = \varrho_\nu y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(t) + \psi_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo offenbar die Funktionen $\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ ebenfalls die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ erfüllen. Führt man dann wieder wie in Satz 8 die Abkürzungen

$$C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|, \qquad \alpha = \frac{1-\gamma}{2n(C+1)}$$

ein, so ist wegen der Bedingung $\mathfrak{C}$ gewiß

$$|\psi_\nu(t, y_1', \ldots, y_n') - \psi_\nu(t, y_1'', \ldots, y_n'')| \leqq \alpha^n \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu' - y_\mu''| \leqq \sum_{\mu=1}^{n} \alpha^\mu |y_\mu' - y_\mu''|,$$

sobald nur t groß genug ist und die $|y_\mu'|, |y_\mu''|$ klein genug sind, also etwa für

$$t \geqq T, |y_1'| \leqq \delta, |y_1''| \leqq \delta, \ldots, |y_n| \leqq \delta, |y_n''| \leqq \delta,$$

wobei natürlich T auch durch jede größere ganze Zahl ersetzt werden darf. Auf das System (13) kann daher, wenn darin t durch $t+T$ ersetzt wird, der Satz 8 angewandt werden, und damit ist auch Satz 9 bewiesen.

Ein Vergleich der Sätze 5 und 9 läßt vermuten, daß in Satz 9 erst recht mindestens bedingte Stabilität im weiteren Sinne vorliegen wird, wenn man von den k ersten charakteristischen Wurzeln nur verlangt, daß ihre absoluten Beträge $\geqq 1$ statt > 1 sind. Unser Existenzbeweis für die Lösungen setzt aber wesentlich voraus, daß sie > 1 sind, und läßt sich nicht ohne weiteres so abändern, daß er auch den Fall $\geqq 1$ erfaßt. Wir können aber diesen Fall doch nachträglich auf den behandelten zurückführen und damit den folgenden Satz gewinnen:

Satz 10. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$, also von selbst auch $\mathfrak{B}$ erfüllen

und wenn von den charakteristischen Wurzeln genau $n-k$ absolut kleiner als 1 sind (wobei $k \geqq 1$ und $n-k \geqq 1$ ist), so ist die triviale Lösung $x_\nu(t) = 0$ im weiteren Sinne mindestens bedingt stabil, und zwar bilden, wenn η eine hinreichend und beliebig kleine positive Zahl ist, diejenigen Lösungen $x_\nu(t)$, welche für alle hinreichend großen t existieren und den Ungleichungen $|x_\nu(t)| \leqq \eta$ genügen, eine Schar mit mindestens $n-k$ willkürlichen Konstanten.

Beweis. Seien wieder $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die charakteristischen Wurzeln und sei

$$|\varrho_\nu| \geqq 1 \quad \text{für } \nu \leqq k,$$
$$|\varrho_\nu| < 1 \quad \text{für } \nu > k.$$

Dann wählen wir eine Zahl ϑ zwischen 0 und 1 so, daß

$$|\varrho_\nu| > \vartheta \quad \text{für } \nu \leqq k,$$
$$|\varrho_\nu| < \vartheta \quad \text{für } \nu > k$$

ist, und setzen

$$x_\nu(t) = \vartheta^t z_\nu(t).$$

Dadurch wird das gegebene Differenzengleichungssystem in

$$z_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\nu\mu}}{\vartheta} z_\mu(t) + \omega_\nu(t, z_1(t), \ldots, z_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{14}$$

transformiert, wobei

$$\omega_\nu(t, z_1, \ldots, z_n) = \vartheta^{-t-1} \varphi_\nu(t, \vartheta^t z_1, \ldots, \vartheta^t z_n)$$

ist. Offenbar erfüllen die Funktionen $\omega_\nu(t, z_1, \ldots, z_n)$ wiederum die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$. Die charakteristischen Wurzeln des Systems (14) sind aber $\frac{\varrho_1}{\vartheta}, \ldots, \frac{\varrho_n}{\vartheta}$. Daher sind bei dem System (14) die Voraussetzungen von Satz 9 erfüllt., und somit gibt es eine Schar von Lösungen $z_\nu(t)$ mit genau $n-k$ willkürlichen Konstanten so, daß für alle hinreichend großen t die Ungleichungen $|z_\nu(t)| \leqq \eta$ gelten. Das bedeutet aber für das ursprüngliche System eine ebenso große Lösungsschar $x_\nu(t)$, für die sogar $|x_\nu(t)| \leqq \vartheta^t \eta$, also erst recht $|x_\nu(t)| \leqq \eta$ für alle hinreichend großen t ist. Eventuell kann es natürlich noch weitere Lösungen geben, für welche $|x_\nu(t)| \leqq \eta$ ist (aber nicht $|x_\nu(t)| \leqq \vartheta^t \eta$). Damit ist Satz 10 bewiesen.

§ 6. Asymptotisches Verhalten im allgemeinen Fall.

Satz 11. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} a_{\nu\mu} x_\mu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen, so gibt es zu jeder für hinreichend große t, etwa für $t \geqq T$, existierenden Lösung $x_\nu(t)$, für welche

(A) $$|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)| > 0 \qquad \text{für } t \geqq T,$$

(B) $$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$$

ist [11]*, einen Index l derart, daß*

[11]) Damit soll keineswegs behauptet sein, daß es wirklich immer solche Lösungen gibt. Vielmehr kann man leicht Differenzengleichungssysteme angeben, bei denen keine Lösung die Bedingung (A) erfüllt. Das ist z. B. bei dem System $x_\nu(t+1) = 0$, welches im übrigen unsere Voraussetzungen erfüllt, der Fall. Ferner genügt, wenn alle $|\varrho_\nu|$ größer als 1 sind, keine Lösung gleichzeitig den Bedingungen (A) und (B); das lehrt Satz 11 selbst und auch schon Satz 7.

$$\text{(C)} \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = |\varrho_l| \leqq 1$$

ist. — Wenn die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ *außerdem auch die Bedingung* $\mathfrak{C}$ *erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index* l, *für den* $|\varrho_l| < 1$ *ist*[12]), *wirklich Lösungen, für welche die Beziehungen* (B) *und* (C) *und im Fall* $\varrho_l \neq 0$ *auch* (A) *gelten. Dabei bilden diejenigen Lösungen, für welche*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} \leqq r < 1$$

ist, eine Schar mit genau h *willkürlichen Konstanten, wo* h *die Anzahl derjenigen charakteristischen Wurzeln* ϱ_ν *bezeichnet, für die* $|\varrho_\nu| \leqq r$ *ist*[12a]).

Beweis des ersten Teils. Wir denken uns die charakteristischen Wurzeln ϱ_ν so numeriert, daß

$$(15) \qquad |\varrho_1| \geqq |\varrho_2| \geqq \cdots \geqq |\varrho_n|$$

ist, und transformieren dann das Differenzengleichungssystem wieder durch die lineare Transformation (4) auf die spezielle Form

$$(16) \quad y_\nu(t+1) = \varrho_\nu y_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{\nu-1} c_{\nu\mu} y_\mu(t) + \psi_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo auch die Funktionen $\psi_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen. Dann gilt natürlich die Abschätzung

$$g \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(t)| \leqq \sum_{\nu=1}^{n} |x_\nu(t)| \leqq G \sum_{\nu=1}^{n} |y_\nu(t)|,$$

wo g, G zwei aus der Transformationsmatrix zu berechnende positive Konstanten sind, und folglich brauchen wir nur nachzuweisen, daß zu jeder für $t \geqq T$ existierenden Lösung von (16), für welche

$$(17) \qquad |y_1(t)| + \cdots + |y_n(t)| > 0 \qquad \text{für } t \geqq T,$$

$$(18) \qquad \lim_{t\to\infty} y_1(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} y_n(t) = 0$$

ist, ein Index l derart existiert, daß

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|y_1(t)| + \cdots + |y_n(t)|} = |\varrho_l| \leqq 1$$

ist. Zu dem Zweck setzen wir zunächst

$$(19) \qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|y_1(t)| + \cdots + |y_n(t)|} = \beta.$$

Nun folgt aus (18) sofort

$$(20) \qquad \beta \leqq 1.$$

Ferner ergibt sich aus (16)

$$|y_\nu(t+1)| \begin{cases} \leqq |\varrho_\nu y_\nu(t)| + C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |y_\mu(t)| + |\psi_\nu| \\ \geqq |\varrho_\nu y_\nu(t)| - C \sum_{\mu=1}^{\nu-1} |y_\mu(t)| - |\psi_\nu|, \end{cases}$$

wobei $C = \operatorname{Max} |c_{\nu\mu}|$ ist. Daher ist wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$, wenn α eine Zahl zwischen

---

[12]) Im allgemeinen aber nicht für $|\varrho_l| = 1$.

[12a]) Wie Herr *Lettenmeyer* bemerkt hat, läßt sich in Satz 11 und 13 das Zeichen „$\overline{\lim}$“ sogar durch „lim“ ersetzen. Um das einzusehen, würde der Beweis einer kleinen Verlängerung bedürfen, auf die ich der Kürze halber hier verzichten will (Anmerkung bei der Korrektur).

0 und 1 bedeutet, die beliebig klein sein darf, für genügend große t, etwa für $t \geqq T_\alpha$, weil dann nach Voraussetzung (18) zugleich die $|y_\nu(t)|$ beliebig klein werden,

$$(21)\quad |y_\nu(t+1)| \begin{cases} \leqq |\varrho_\nu y_\nu(t)| + C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{1-\nu+\mu}|y_\mu(t)| + \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{1-\nu+\mu}|y_\mu(t)| \\ \geqq |\varrho_\nu y_\nu(t)| - C\sum_{\mu=1}^{\nu-1}\alpha^{1-\nu+\mu}|y_\mu(t)| - \sum_{\mu=1}^{n}\alpha^{1-\nu+\mu}|y_\mu(t)|. \end{cases}$$

Hieraus folgt, wenn man

$$\sum_{\nu=1}^{n}\alpha^\nu |y_\nu(t)| = F(t)$$

setzt, mit Rücksicht auf (15)

$$F(t+1) \begin{cases} \leqq |\varrho_1| F(t) + nC\alpha F(t) + n\alpha F(t) \\ \geqq |\varrho_n| F(t) - nC\alpha F(t) - n\alpha F(t), \end{cases}$$

und daher auch für $t \geqq T_\alpha$:

$$F(t) \begin{cases} \leqq (|\varrho_1| + nC\alpha + n\alpha)^{t-T_\alpha} F(T_\alpha) \\ \geqq (|\varrho_n| - nC\alpha - n\alpha)^{t-T_\alpha} F(T_\alpha), \end{cases}$$

wobei aber die zweite Hälfte nur gilt, wenn $\varrho_n \neq 0$ ist und α so klein gewählt wird, daß $|\varrho_n| - nC\alpha - n\alpha > 0$ ist. Wegen der Voraussetzung (17) ist $F(T_\alpha) > 0$, und daher folgt aus der vorigen Doppelungleichung

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{F(t)} \begin{cases} \leqq |\varrho_1| + nC\alpha + n\alpha \\ \geqq |\varrho_n| - nC\alpha - n\alpha, \end{cases}$$

wo die zweite Hälfte wieder mit der obigen Einschränkung gilt. Hieraus folgt aber, da offenbar

$$F(t) \leqq |y_1(t)| + \cdots + |y_n(t)| \leqq \alpha^{-n} F(t)$$

ist, sogleich auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|y_1(t)| + \cdots + |y_n(t)|} \begin{cases} \leqq |\varrho_1| + nC\alpha + n\alpha \\ \geqq |\varrho_n| - nC\alpha - n\alpha. \end{cases}$$

Die linke Seite haben wir mit β bezeichnet, und da α beliebig klein sein darf, ergibt sich

$$(22)\qquad |\varrho_1| \geqq \beta \geqq |\varrho_n|,$$

wo jetzt die Einschränkung $\varrho_n \neq 0$ offenbar nicht mehr nötig ist.

Wenn nun β nicht gleich einem $|\varrho_l|$ wäre, so gäbe es wegen (15) und (22) einen Index k, für welchen

$$(23)\qquad |\varrho_k| > \beta > |\varrho_{k+1}|$$

wäre, und wir wollen zeigen, daß das nicht sein kann. Setzt man nämlich, wenn α wieder wie vorhin eine Zahl zwischen 0 und 1 bedeutet,

$$(24)\qquad \sum_{\nu=1}^{k}\alpha^\nu |y_\nu(t)| = \Phi(t), \qquad \sum_{\nu=k+1}^{n}\alpha^\nu |y_\nu(t)| = \Psi(t),$$

so ist wegen (19) jedenfalls

$$(25)\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) + \Psi(t)} = \beta.$$

Andrerseits folgt aus der unteren Ungleichung (21) für $\nu \leqq k$ und für $t \geqq T_\alpha$

$$|y_\nu(t+1)| \geqq |\varrho_k y_\nu(t)| - C\alpha^{1-\nu}[\Phi(t) + \Psi(t)] - \alpha^{1-\nu}[\Phi(t) + \Psi(t)],$$

also nach Multiplikation mit α^ν und Summation nach ν von 1 bis k

$$(26)\qquad \Phi(t+1) \geqq |\varrho_k| \Phi(t) - k\alpha(C+1)[\Phi(t) + \Psi(t)].$$

Analog ergibt sich aus der oberen Ungleichung (21), indem man sie für $\nu > k$ in Anspruch nimmt,

$$\Psi(t+1) \leqq |\varrho_{k+1}|\,\Psi(t) + (n-k)\,\alpha(C+1)[\Phi(t)+\Psi(t)], \tag{27}$$

und daher durch Subtraktion von der vorigen Ungleichung

$$\Phi(t+1) - \Psi(t+1) \geqq [|\varrho_k| - n\alpha(C+1)]\,\Phi(t) - [|\varrho_{k+1}| + n\alpha(C+1)]\,\Psi(t).$$

Wählt man daher α so klein, daß

$$\begin{cases} |\varrho_k| - n\alpha(C+1) > \beta + \alpha, \\ |\varrho_{k+1}| + 2n\alpha(C+1) < \beta - \alpha < \beta + \alpha, \end{cases} \tag{28}$$

was nach der Annahme (23) möglich ist, so erhält man

$$\Phi(t+1) - \Psi(t+1) \geqq (\beta+\alpha)\,[\Phi(t) - \Psi(t)] \qquad \text{für } t \geqq T_\alpha. \tag{29}$$

Wäre nun für $t \geqq T_\alpha$ einmal $\Phi(t) > \Psi(t)$, so würde das nach (29) auch für alle größeren t gelten, und aus (29) würde folgen

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) - \Psi(t)} \geqq \beta + \alpha,$$

und also erst recht

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) + \Psi(t)} \geqq \beta + \alpha,$$

im Widerspruch mit (25). Daher ist notwendig

$$\Phi(t) \leqq \Psi(t) \qquad \text{für } t \geqq T_\alpha. \tag{30}$$

Mit Rücksicht hierauf ergibt sich aber aus (27)

$$\begin{aligned} \Psi(t+1) &\leqq |\varrho_{k+1}|\,\Psi(t) + 2n\alpha(C+1)\,\Psi(t) \\ &\leqq (\beta - \alpha)\,\Psi(t) \qquad \text{(wegen (28))}. \end{aligned}$$

Daraus folgt dann

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Psi(t)} \leqq \beta - \alpha,$$

und also mit Rücksicht auf (30) auch

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) + \Psi(t)} \leqq \beta - \alpha.$$

Das steht aber im Widerspruch mit (25). Damit ist die Annahme (23) als unhaltbar nachgewiesen; folglich muß in der Tat β gleich einem $|\varrho_l|$ sein, und zwar nach (20): $\beta = |\varrho_l| \leqq 1$.

Beweis des zweiten Teils. Wir schicken die Bemerkung voraus, daß aus einer Beziehung der Form

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = |\varrho_l| > 0$$

ganz von selbst

$$|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)| > 0$$

folgt für alle t, für welche die Lösung $x_\nu(t)$ existiert. Denn wäre die linke Seite für einen gewissen Wert von t gleich null, so würde aus den gegebenen Differenzengleichungen folgen, daß die $x_\nu(t)$ auch für alle größeren t verschwinden, und es könnte nicht die vorausgesetzte Ungleichung gelten.

Weiter bemerken wir noch, daß aus einer Beziehung der Form

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = |\varrho_l| < 1$$

ganz von selbst

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$$

folgt. Das bedarf keines Beweises.

Wenn nun die im zweiten Teil von Satz 11 mit h bezeichnete Zahl gleich n ist, dann sind alle $|\varrho_\nu|$ kleiner als 1, und daher gibt es schon nach Satz 5 eine Lösungsschar mit n willkürlichen Konstanten, für welche die $x_\nu(t)$ nach Null wandern. Für jede Lösung aus dieser Schar ist dann nach dem bereits bewiesenen ersten Teil

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} \leqq \operatorname{Max} |\varrho_\nu| \leqq r;$$

eventuell ist sogar $|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)| = 0$ für alle hinreichend großen t.

Wenn $h < n$ ist, wobei auch $h = 0$ nicht ausgeschlossen sei, so setzen wir

$$h = n - k \tag{31}$$

und haben dann die Ungleichungen

$$\begin{cases} |\varrho_\nu| > r & \text{für } \nu \leqq k, \\ |\varrho_\nu| \leqq r < 1 & \text{für } \nu > k. \end{cases} \tag{32}$$

Daher gibt es eine Zahl ϑ zwischen 0 und 1 so, daß

$$r < \vartheta < 1, \tag{33}$$

$$\begin{cases} |\varrho_\nu| > \vartheta & \text{für } \nu \leqq k, \\ |\varrho_\nu| < \vartheta & \text{für } \nu > k \end{cases} \tag{34}$$

ist. Wendet man dann die Transformation

$$x_\nu(t) = \vartheta^t z_\nu(t) \tag{35}$$

an, so geht das gegebene Differenzengleichungssystem über in

$$z_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{a_{\nu\mu}}{\vartheta} z_\mu(t) + \omega_\nu(t, z_1(t), \ldots, z_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{36}$$

wobei

$$\omega_\nu(t, z_1, \ldots, z_n) = \vartheta^{-t-1} \varphi_\nu(t, \vartheta^t z_1, \ldots, \vartheta^t z_n)$$

ist, so daß auch die Funktionen $\omega_\nu(t, z_1, \ldots, z_n)$ wieder die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ erfüllen. Die charakteristischen Wurzeln des Systems (36) sind

$$\frac{\varrho_1}{\vartheta}, \ldots, \frac{\varrho_n}{\vartheta},$$

und nach (34) sind k davon absolut größer und $n - k$ absolut kleiner als 1.

Wenn nun

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} \leqq r \tag{37}$$

sein soll, so ist mit Rücksicht auf (33) für hinreichend großes t

$$|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)| < \left(\frac{r+\vartheta}{2}\right)^t.$$

Also sind vermöge (35) die $z_\nu(t)$ beschränkt und wandern sogar nach Null. Wenn umgekehrt die $z_\nu(t)$ beschränkt sind, so ist vermöge (35)

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} \leqq \vartheta,$$

und dann gilt nach dem bereits bewiesenen ersten Teil, weil aus $|\varrho_\nu| \leqq \vartheta$ wegen (34) und (32) stets schon $|\varrho_\nu| \leqq r$ folgt, auch die Formel (37). Nach Satz 9 oder Satz 7, je nachdem $k < n$ oder $k = n$ ist, hat aber das System (36) eine Lösungsschar mit genau $n - k$ willkürlichen Konstanten, welche für hinreichend großes t existiert und bei welcher die $|z_\nu(t)|$ unter einer beliebig klein vorgegebenen Schranke bleiben. Also hat auch das ursprüngliche System eine Lösungsschar mit genau $n - k = h$ willkürlichen Konstanten, welche für hinreichend großes t existiert und für welche die Formel (37) gilt.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun, indem man sie speziell auf $r = |\varrho_l|$ und auf $r < |\varrho_l|$ anwendet, gleichgültig, ob $h = n$ oder $h < n$ ist, folgendes:

Wenn h von den charakteristischen Wurzeln absolut $\leqq |\varrho_l|$, aber nur h_1 absolut $< |\varrho_l|$ sind, so gibt es eine Lösungsschar mit genau h willkürlichen Konstanten, für die

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} \leqq |\varrho_l|,$$

aber nur eine mit h_1 willkürlichen Konstanten, für welche dieser obere Limes kleiner als $|\varrho_l|$ ist. Es gibt also gewiß auch Lösungen, für welche er gleich $|\varrho_l|$ ist. Damit ist auch der zweite Teil von Satz 11 vollständig bewiesen.

§ 7. Das genauere asymptotische Verhalten bei spezieller Annahme über die charakteristischen Wurzeln.

Wenn die absoluten Beträge der charakteristischen Wurzeln alle voneinander verschieden sind, sind die Wurzeln selbst erst recht voneinander verschieden, und daher läßt sich die Matrix B auf Seite 47 so wählen, daß in (3) alle $c_{\nu\mu}$ verschwinden; wir dürfen uns daher von vornherein auf Differenzengleichungssysteme der speziellen Form

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

beschränken. Wenn nun für eine Lösung $x_\nu(t)$ und einen bestimmten Index l die Beziehungen statthaben

$$(38) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_\nu(t)}{x_l(t)} = 0 & \text{für } \nu \neq l, \\ \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{x_l(t+1)}{x_l(t)} = \varrho_l, \end{cases}$$

so folgt daraus sofort

$$(39) \qquad \lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = |\varrho_l|.$$

Aber aus (39) kann nicht umgekehrt auf (38) geschlossen werden. Formeln der Gestalt (38) beschreiben daher das asymptotische Verhalten einer Lösung genauer als (39). Nach dieser Vorbemerkung beweisen wir jetzt den

Satz 12. *Wenn in dem Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \varphi_\nu(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ die Bedingungen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ erfüllen und wenn die Ungleichungen gelten

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_n|,$$

so gibt es zu jeder für hinreichend große Werte von t, etwa für $t \geqq T$, existierenden Lösung $x_\nu(t)$, für welche

$$|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)| > 0 \qquad \text{für } t \geqq T,$$
$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} x_n(t) = 0$$

ist[13]*, einen Index l derart, daß*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_\nu(t)}{x_l(t)} = 0 \qquad \text{für } \nu \neq l,$$
$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_l(t+1)}{x_l(t)} = \varrho_l, \quad |\varrho_l| \leqq 1$$

ist. — Wenn die Funktionen $\varphi_\nu(t, x_1, \ldots, x_n)$ außerdem die Bedingung $\mathfrak{E}$ erfüllen, so gibt es auch umgekehrt zu jedem Index l, für den $0 < |\varrho_l| < 1$ ist[14]*, wirklich Lösungen der vorbezeichneten Art, und im Fall $\varrho_n = 0$ gibt es sie zum Index $l = n$ ebenfalls, sofern für jede Lösung, die der Bedingung $\Sigma|x_\nu(T)| > 0$ genügt, dauernd $\Sigma|x_\nu(t)| > 0$ bleibt. Dabei bilden diejenigen Lösungen, für welche $l \geqq j$ ist, eine Schar mit genau $n - j + 1$ willkürlichen Konstanten.*

Beweis des ersten Teils. Nach Satz 11 gibt es jedenfalls für jede in Frage stehende Lösung $x_\nu(t)$ einen Index l so, daß die Beziehung gilt

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = |\varrho_l| \leqq 1. \tag{40}$$

Nun setzen wir zunächst $l > 1$ voraus und setzen zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=1}^{l-1} |x_\nu(t)| = \Phi(t), \qquad \sum_{\nu=l}^{n} |x_\nu(t)| = \Psi(t).$$

Bedeutet dann ε eine Zahl zwischen 0 und 1, so folgt aus den gegebenen Differenzengleichungen nach einem schon mehrfach angewandten Rezept für genügend großes t, etwa $t \geqq T_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\Phi(t+1) - \varepsilon\Psi(t+1) &\geqq |\varrho_{l-1}|\,\Phi(t) - \varepsilon|\varrho_l|\,\Psi(t) - \sum_{\nu=1}^{n} |\varphi_\nu| \\ &\geqq |\varrho_{l-1}|\,\Phi(t) - \varepsilon|\varrho_l|\,\Psi(t) - \frac{|\varrho_{l-1}| - |\varrho_l|}{2}\,[\Phi(t) + \varepsilon\Psi(t)] \\ &= \frac{|\varrho_{l-1}| + |\varrho_l|}{2}\,[\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)].\end{aligned}$$

Wäre für $t \geqq T_\varepsilon$ einmal $\Phi(t) > \varepsilon\Psi(t)$, so wäre das hiernach für alle größeren t erst recht der Fall, und es würde sich ergeben

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) - \varepsilon\Psi(t)} \geqq \frac{|\varrho_{l-1}| + |\varrho_l|}{2},$$

und also um so mehr

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{\Phi(t) + \Psi(t)} \geqq \frac{|\varrho_{l-1}| + |\varrho_l|}{2} > |\varrho_l|,$$

im Widerspruch mit (40). Daher ist

$$\Phi(t) \leqq \varepsilon\Psi(t).$$

---

[13]) Vergl. die Fußnote [11]) Seite 54.
[14]) Vergl. die Fußnote [12]) Seite 55.

Da ε beliebig klein sein darf, und da $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ nach den Voraussetzungen des ersten Teils von Satz 12 nicht beide zugleich verschwinden können, so besagt das

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{\Psi(t)}=0,$$

oder also

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x_1(t)|+\cdots+|x_{l-1}(t)|}{|x_l(t)|+\cdots+|x_n(t)|}=0, \quad \text{falls } l>1. \tag{41}$$

Nunmehr lassen wir die Voraussetzung $l>1$ wieder fallen, setzen aber $l<n$ voraus. Setzen wir dann zur Abkürzung

$$\sum_{\nu=l+1}^{n}|x_\nu(t)|=\Omega(t),$$

so ergibt sich aus den gegebenen Differenzengleichungen unter Berücksichtigung von (41) für genügend großes t, etwa $t\geqq T'_\varepsilon$,

$$\begin{aligned}\varepsilon|x_l(t+1)|-\Omega(t+1)&\geqq\varepsilon|\varrho_l x_l(t)|-|\varrho_{l+1}|\,\Omega(t)-\sum_{\nu=l}^{n}|\varphi_\nu|\\&\geqq\varepsilon|\varrho_l x_l(t)|-|\varrho_{l+1}|\,\Omega(t)-\frac{|\varrho_l|-|\varrho_{l+1}|}{2}[\varepsilon|x_l(t)|+\Omega(t)]\\&=\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}[\varepsilon|x_l(t)-\Omega(t)].\end{aligned}$$

Daraus folgt, daß die Funktion

$$\Big(\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}\Big)^{-t}[\varepsilon|x_l(t)|-\Omega(t)] \tag{42}$$

für $t\geqq T'_\varepsilon$ mit t monoton wächst. Hätte sie einen endlichen Grenzwert, so wäre das erst recht der Fall, wenn ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzt wird; daher hätten auch die Funktionen

$$\Big(\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}\Big)^{-t}|x_l(t)|, \qquad \Big(\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}\Big)^{-t}\Omega(t)$$

endliche Grenzwerte, und mit Rücksicht auf (41) wäre auch

$$\Big(\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}\Big)^{-t}(|x_1(t)+\cdots+|x_n(t)|)$$

beschränkt, also

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|x_1(t)+\cdots+|x_n(t)|}\leqq\frac{|\varrho_l|+|\varrho_{l+1}|}{2}<|\varrho_l|,$$

im Widerspruch mit (40). Daher wächst die Funktion (42) über alle Grenzen; sie muß von einer gewissen Stelle an positiv sein, etwa für $t\geqq T''_\varepsilon$. Dann ist

$$\varepsilon|x_l(t)|>\Omega(t) \qquad \text{für } t\geqq T''_\varepsilon,$$

und da ε beliebig klein sein darf, besagt das soviel wie

$$\lim_{t\to\infty}\frac{|x_{l+1}(t)|+\cdots+|x_n(t)|}{|x_l(t)|}=0, \quad \text{falls } l<n. \tag{43}$$

Nunmehr lassen wir auch die Voraussetzung $l<n$ wieder fallen. Jedenfalls folgt aus (41) und (43) zusammen, gleichgültig welchen Wert der Index l haben mag,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_\nu(t)}{x_l(t)}=0 \qquad \text{für } \nu\neq l. \tag{44}$$

Aus der l-ten Differenzengleichung selbst ergibt sich dann wegen der Bedingung $\mathfrak{B}$ auch

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_l(t+1)}{x_l(t)}=\varrho_l+\lim_{t\to\infty}\frac{\varphi_l(t,x_1(t),\ldots,x_n(t))}{|x_1(t)|+\cdots+|x_n(t)|}\cdot\frac{|x_1(t)|+\cdots+|x_n(t)|}{x_l(t)}=\varrho_l.$$

Beweis des zweiten Teils. Nach Satz 11 gibt es für $|\varrho_j|<1$ eine Lösungsschar mit genau $n-j+1$ willkürlichen Konstanten, für die

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\sqrt[t]{|x_1(t)|+\cdots+|x_n(t)|}=|\varrho_l| \qquad \text{mit } l\geqq j \tag{45}$$

ist. Dabei ist im Fall $\varrho_l\neq 0$ ganz von selbst (vgl. S. 57 unten)

$$|x_1(t)|+\cdots+|x_n(t)|>0, \tag{46}$$

und im Fall $\varrho_l=0$, der nur für $l=n$ möglich ist, trifft das auf Grund der für diesen Fall in Satz 12 gemachten Sondervoraussetzung ebenfalls zu. Für alle Lösungen, die den Bedingungen (45), (46) genügen, ist aber nach dem bereits bewiesenen ersten Teil auch

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_\nu(t)}{x_l(t)}=0 \quad \text{für } \nu\neq l,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{x_l(t+1)}{x_l(t)}=\varrho_l,$$

und damit ist der zweite Teil ebenfalls bewiesen.

§ 8. Anwendung auf lineare Differenzengleichungen.

Um zu zeigen, daß auch die am Schluß der Einleitung angedeuteten Sätze über lineare Differenzengleichungen unter die gegenwärtigen Betrachtungen fallen, sollen hier zwei solche Sätze bewiesen werden. Satz 13 ist neu; nur den Spezialfall, daß es sich um eine Differenzengleichung n-ter Ordnung handelt, habe ich bisher beweisen können, und zwar auf zwei verschiedenen Wegen, die sich beide nicht so leicht auf den allgemeinen Fall übertragen lassen [15]). Satz 14 deckt sich im wesentlichen mit einem schon früher von mir bewiesenen Satz [16]).

Satz 13. *In dem linearen Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1)=\sum_{\mu=1}^{n}[a_{\nu\mu}+\varphi_{\nu\mu}(t)]x_\mu(t) \qquad (\nu=1,2,\ldots,n)$$

mögen die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für $t\to\infty$ gegen Null streben, und die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\varphi_{11}(t) & \ldots\ldots & a_{1n}+\varphi_{1n}(t) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1}+\varphi_{n1}(t) & \ldots\ldots & a_{nn}+\varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

sei für $t=0,1,2,\ldots$ dauernd von Null verschieden [17]). *Sind dann $r_1,\ldots,r_m$ die voneinander verschiedenen absoluten Beträge der Wurzeln der Gleichung*

---

[15]) Über die *Poincaré*sche lineare Differenzengleichung. Dieses Journal **137** (1909), S. 6—64 speziell S. 19. — Über Summengleichungen und *Poincaré*sche Differenzengleichungen. Mathemat. Annalen **84** (1921), S. 1—15, speziell S. 14.

[16]) Über Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. Dieses Journal **147** (1916), S. 36—53, speziell Satz 6, S. 50.

[17]) Diese Voraussetzung ist naturgemäß, weil es sonst Lösungen gäbe, für die $\sum|x_\nu(0)|>0$, aber $\sum|x_\nu(t)|=0$ für genügend große Werte von t wäre. Der Begriff eines Fundamentalsytems, d. h. eines Systems von n linear unabhängigen Lösungen würde dann seine Bedeutung verlieren.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\varrho & a_{12} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots a_{nn}-\varrho \end{vmatrix} = 0\,,$$

und ist allgemein e_λ die Anzahl der Wurzeln vom absoluten Betrag r_λ, wobei mehrfache Wurzeln ihrer Vielfachheit entsprechend gezählt sind, so gibt es n linear unabhängige Lösungen, die derart in m Klassen zerfallen, daß allgemein für die Lösungen der λ-ten Klasse und ihre linearen Verbindungen die Beziehung

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = r_\lambda$$

statthat.[18]) *Die Anzahl der Lösungen der λ-ten Klasse ist dabei gleich e_λ.*

Beim Beweis dürfen und wollen wir voraussetzen, daß alle r_λ kleiner als 1 sind. Denn das kann durch die Transformation

$$x_\nu(t) = q^t z_\nu(t)$$

sofort erreicht werden; man braucht nur q größer zu wählen als alle r_λ. Die Funktionen

$$\sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\nu\mu}(t)\, x_\mu$$

erfüllen offenbar die Bedingungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. Damit erweist sich aber der Satz 13 als eine leichte Folge von Satz 11. Denn wenn die r_λ etwa der Größe nach geordnet werden:

$$r_1 > r_2 > \cdots > r_m\,,$$

so gibt es nach Satz 11 zunächst genau e_m linear unabhängige Lösungen derart, daß für sie und ihre linearen Verbindungen

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = r_m$$

ist; sodann genau $e_m + e_{m-1}$ linear unabhängige Lösungen, für die

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1|(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = r_m \quad \text{oder} \quad r_{m-1}$$

ist. Da aber nur für e_m unabhängige der Wert r_m in Frage kommt, so gibt es noch e_{m-1} linear unabhängige Lösungen derart, daß für sie und ihre linearen Verbindungen

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \sqrt[t]{|x_1(t)| + \cdots + |x_n(t)|} = r_{m-1}$$

ist. So kann man weiterschließen.

Satz 14. *In dem linearen Differenzengleichungssystem*

$$x_\nu(t+1) = \varrho_\nu x_\nu(t) + \sum_{\mu=1}^{n} \varphi_{\nu\mu}(t)\, x_\mu(t) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mögen die Konstanten ϱ_ν den Bedingungen genügen

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| > \cdots > |\varrho_n|\,,$$

während die Funktionen $\varphi_{\nu\mu}(t)$ für $t \to \infty$ gegen Null streben mögen. Außerdem sei die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varrho_1 + \varphi_{11}(t) & \varphi_{12}(t) \ldots\ldots \varphi_{1n}(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n1}(t) & \varphi_{n2}(t) \ldots\ldots \varrho_n + \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

für $t = 0, 1, 2, \ldots$ dauernd von Null verschieden[19]). *Dann gibt es für jeden der Werte*

[18]) Dazu vgl. Fußnote [12a]).

[19]) Vergl. die Fußnote [17]) Seite 62.

$l = 1, 2, \ldots, n$ eine Lösung

$$x_1(t) = x_{1l}(t), \quad x_2(t) = x_{2l}(t), \ldots, x_n(t) = x_{nl}(t),$$

für welche die Beziehungen statthaben:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{\nu l}(t)}{x_{ll}(t)} = 0 \qquad \text{für } \nu \neq l,$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_{ll}(t+1)}{x_{ll}(t)} = \varrho_l,$$

und diese n Lösungen bilden ein Fundamentalsystem.

Beim Beweis nehmen wir erlaubterweise wieder an, daß alle $|\varrho_\nu|$ kleiner als 1 sind. Dann ist aber Satz 14 eine leichte Folge von Satz 12. Denn nach diesem gibt es zunächst eine Lösung, für welche die Beziehungen von Satz 14 mit $l = n$ gelten. Sodann gibt es genau zwei linear unabhängige Lösungen, für welche diese Beziehungen mit $l = n$ oder $n - 1$ gelten; man kann also auch eine Lösung angeben, für welche die Beziehungen mit $l = n - 1$ gelten. So läßt sich weiterschließen, wodurch man auf n linear unabhängige Lösungen kommt.

München, 12. Juni 1928.

Eingegangen 14. Juni 1928.